

Mécanique – Transmission de puissance

Mécanique – Transmission de puissance.....	4
1. Introduction	4
2. Quelques rappels.....	4
3. Création du mouvement.....	4
3.1 Moteurs à courant continu	4
3.2 Moteurs pas à pas.....	6
3.3 Moteurs sans balais (Brushless).....	6
3.4 Servomoteurs	8
3.5 Moteurs linéaires.....	8
3.6 Alliages à mémoire de forme	9
3.7 Energie pneumatique	10
4. R-R sans changement de vitesse	10
4.1 Accouplements rigides	11
4.2 Accouplements semi-élastiques	12
4.3 Accouplements élastiques	13
4.4 Accouplements articulés.....	13
4.4.1 Accouplements Oldham	13
4.4.2 Joints de Cardan.....	14
4.4.3 Double joints de Cardan.....	14
5. R-R avec changement de vitesse à axes parallèles	15
5.1 Roues de friction	15
5.2 Engrenages à denture droite	16
5.2.1 Cercle primitif.....	17
5.2.2 Profil des dents.....	17
5.2.3 Fabrication	18
5.2.4 Module	18
5.2.5 Représentation	18
5.2.6 Relations sur les engrenages droits.....	19
5.2.7 Interférence et usure	20
5.3 Engrenages à denture hélicoïdale	21
5.3.1 Intérêt.....	21
5.3.2 Profil apparent et profil réel.....	22
5.3.3 Relations.....	22
5.3.4 Sens d'inclinaison.....	22
5.3.5 Effort axial	23
5.4 Engrenages à denture en chevrons.....	23
5.5 Engrenages internes ou couronnes.....	24
5.6 Roues à rattrapage de jeu.....	24
6. R-R renvois d'angle	25
6.1 Engrenages droits à denture conique	25
6.2 Engrenages spiro-coniques.....	26
6.3 Engrenages hélicoïdaux à axes croisés.....	27
6.4 Engrenage gauche	28
7. R-R Réducteurs	30

7.1	Réducteur à étages	30
7.2	Réducteur planétaire ou épicycloïdal	31
7.2.1	Train épicycloïdal de type 1.....	31
7.2.2	Trains épicycloïdaux de types 2,3 et 4	34
7.2.3	Condition de montage des trains épicycloïdaux	35
7.3	Réducteurs trochoïdaux.....	36
7.4	Harmonic drive	36
8.	R-R Poulies courroies.....	37
8.1	Hypothèses	38
8.2	Rapport de transmission	38
8.3	Longueur de la courroie	39
8.4	Normalisation des courroies.....	40
9.	Transformation de mouvement R-T	40
9.1	Vis et écrous trapézoïdaux (ou vis mère).....	40
9.2	Pignon crémaillères	41
9.3	Cames-suiveurs	42
9.3.1	Conception d'une came.....	43
9.4	Bielle manivelle	44
9.4.1	Mise en équations	45
9.4.2	Singularités.....	46

Table des figures

Figure 1: vue éclatée de deux moteurs à courant continu.....	5
Figure 2: moteur pas à pas.....	6
Figure 3: principe de fonctionnement d'un moteur pas à pas.....	6
Figure 4: vue éclatée de deux moteurs sans balais.....	7
Figure 5: exemple de servomoteur (à gauche : servomoteur à courant continu, à droite : Brushless)	8
Figure 6: servomoteur de modélisme démonté.....	8
Figure 7: vue en coupe d'un moteur linéaire.....	9
Figure 8: exemple de fils et vérin en alliages à mémoire de forme.....	10
Figure 9: pompes miniatures.....	10
Figure 10: accouplement rigide: serrage par mâchoires	11
Figure 11: accouplement rigide : serrage par vis de pression.....	11
Figure 12: vue éclatée d'un assemblage par clavetage	11
Figure 13: accouplements Bendi-Flex et C-Flex.....	12
Figure 14: exemple de caractéristiques d'un accouplement Rotex.....	12
Figure 15: accouplement P-Flex.....	13
Figure 16: accouplement Oldham.....	13
Figure 17: vue éclatée d'un joint de Cardan.....	14
Figure 18: double joints de Cardan	14
Figure 19: création d'une développante de cercle.....	17
Figure 20: point de contact et répartition de l'effort entre deux dents.....	17
Figure 21: quelques procédés de fabrication d'une roue dentée	18
Figure 22: représentation normalisée d'un engrenage (dessin industriel et schéma cinématique)	18

Figure 23: schéma d'un engrenage.....	19
Figure 24: roue et engrenages droits hélicoïdaux.....	21
Figure 25: représentation des profils apparents et réels.....	22
Figure 26: direction des forces axiales dans les engrenages à denture hélicoïdale.....	23
Figure 27: engrenage à denture en chevrons qui a inspiré le logo de la marque Citroën .	23
Figure 28: engrenage interne	24
Figure 29: roues à rattrapage de jeu	24
Figure 30: engrenage à denture conique	25
Figure 31: engrenages spiro-coniques.....	26
Figure 32: vue intérieure d'un différentiel de voiture	27
Figure 33: efforts axiaux dans les renvois d'angle hélicoïdaux	28
Figure 34: engrenage gauche.....	28
Figure 35: illustration des engrenages gauches dans les différentiels TORSEN (TORque SENsor).....	29
Figure 36: réducteur à étage.....	30
Figure 37: réducteurs planétaires.....	31
Figure 38: principe d'un réducteur trochoïdal	36
Figure 39: principe d'un harmonic drive	37
Figure 40: schéma cinématique d'une liaison par poulie courroie.....	37
Figure 41: photo d'un tendeur et illustration d'une courroie crantée armée.	38
Figure 42: illustration des différents profils de denture des courroies	40
Figure 43: de gauche à droite : vis et écrou standards, vis à billes et vis à rattrapage de jeu	41
Figure 44: ensemble pignon-crémaillère.....	41
Figure 45: Illustration d'une came et de son suiveur	42
Figure 46: les différents types de cames et de suiveurs	42
Figure 47: exemple de diagramme permettant la conception d'une came.....	43
Figure 48: vue en coupe d'un moteur thermique.....	44
Figure 49: les différents types de singularités	47

Mécanique – Transmission de puissance

1. Introduction

Comme son nom l'indique, ce cours se place dans un contexte de transmission de puissance, au sens où les mouvements servent principalement à transférer de l'énergie mécanique d'une pièce d'un mécanisme à une autre.

Ce cours s'intéresse principalement aux mécanismes inclus dans des systèmes mécatroniques (nous n'étudierons pas ici les variateurs de vitesse mécaniques, puisqu'ils sont remplacés par un système électronique). Nous nous focaliserons plus particulièrement sur les mécanismes de petites tailles (puissance max : quelques dizaines de watts), néanmoins les concepts théoriques présentés ici pourront être généralisés.

Mécatronique : définit un système combinant la mécanique, l'électronique et l'informatique. Exemples : une imprimante, un disque dur, une machine-outil numérique, un distributeur de billets de banque, un robot manipulateur, etc ...

2. Quelques rappels

En mécanique :

Force : F [N]

Masse : M [Kg]

Vitesse : v [$m.s^{-1}$]

Energie : $E=0.5.m.v^2$ [joules]

Puissance : $P=F.v$ [W]

Accélération : $a=F/M$ [$m.s^{-2}$]

Couple : C [N.m]

Moment d'inertie : I [Kg.m²]

Vitesse angulaire : ω [$rad.s^{-1}$]

Energie : $E=0.5.I.\omega^2$ [joules]

Puissance : $P=C.\omega$ [W]

Accélération angulaire : $d\omega/dt=C/I$ [$rad.s^{-2}$]

3. Création du mouvement

Dans les systèmes mécatroniques, le mouvement est généralement issu de l'énergie électrique car le principal intérêt de ces systèmes est de commander la partie mécanique de façon intelligente grâce à l'électronique. Le moyen le plus simple consiste à créer un champ magnétique qui va permettre de déplacer des pièces (généralement des aimants). Pour les moteurs, c'est-à-dire la création d'un mouvement rotatif, il existe plusieurs procédés.

3.1 Moteurs à courant continu

Dans cette famille de moteurs, les aimants sont solidaires du boîtier (fixés sur le stator). Sur l'axe du moteur, sont disposées des bobines qui créent un champ magnétique qui attire ou repousse le rotor vers les aimants. Pour obtenir une rotation complète, il est

impératif d'alterner la tension aux bornes des bobines. Cette inversion est faite mécaniquement à l'aide des balais, sorte de patins qui glissent sur le collecteur. L'alimentation du moteur est constante d'où son nom.

Les frottements répétés entre les balais et le collecteur provoquent une usure des pièces. L'inversion brutale de polarité aux bornes d'un élément inductif, la bobine, provoque des problèmes de compatibilité électromagnétique.

La vitesse maximum de ce type de moteur est généralement inférieure à $10\,000\text{ tr.mn}^{-1}$.

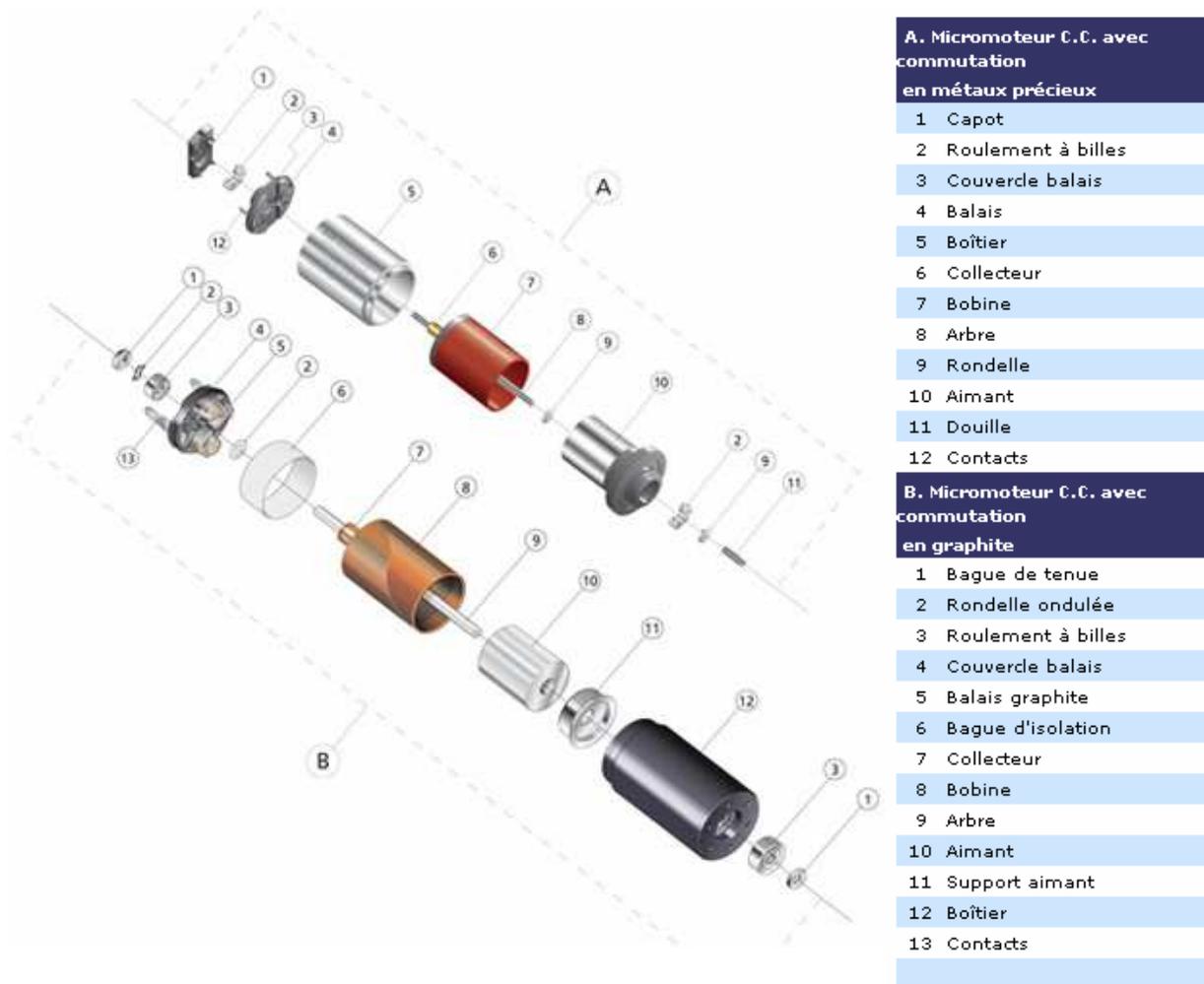


Figure 1: vue éclatée de deux moteurs à courant continu.

3.2 Moteurs pas à pas

Le concept d'un moteur pas à pas consiste à supprimer les balais et à les remplacer par une électronique de commande, ce qui simplifie la fabrication des moteurs. Les bobines peuvent être placées sur le stator et les aimants sur le rotor. L'électronique commande les bobines les unes à la suite des autres pour faire tourner le champ magnétique et par conséquent les aimants du rotor. Il est possible de placer le rotor dans une position donnée avec précision et stabilité.

Les performances des moteurs pas à pas restent faibles : consommation élevée, couple et vitesse faibles (souvent inférieure à $3\ 000\ \text{tr.mn}^{-1}$). Il existe un problème supplémentaire : lorsque le couple et la vitesse sont élevées le rotor n'a parfois pas le temps de tourner et revient à sa position précédente, on parle alors de décrochage.



Figure 2: moteur pas à pas.

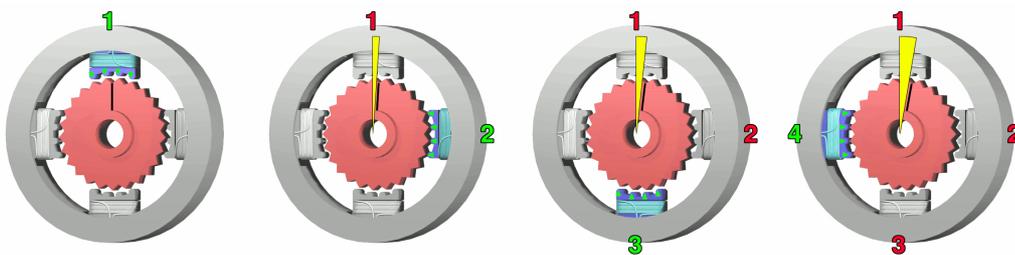


Figure 3: principe de fonctionnement d'un moteur pas à pas.

Notez qu'il existe un fonctionnement en demi pas lorsque deux bobines sont alimentées simultanément, le rotor se place sur une position intermédiaire.

3.3 Moteurs sans balais (Brushless)

Le principe de ces moteurs est exactement le même que celui des moteurs pas à pas. Ils ne possèdent généralement que quelques pôles (une dizaine pour le brushless contre

quelques centaines pour le moteur pas à pas) mais leur conception est optimisée pour tourner à des vitesses élevées.

Pour éviter les problèmes liés au décrochage, la commande de ces moteurs est faite en boucle fermée, une mesure de la vitesse réelle de rotation du rotor est nécessaire afin d'adapter la commande. Les capteurs peuvent être des codeurs optiques, à effet hall, ou basés sur une mesure du courant dans la bobine qui n'est pas commandée (les aimants en mouvement devant la bobine créent un courant dans celle-ci).

Ce type de moteur peut obtenir des rendements supérieurs aux moteurs à courant continu. Ils peuvent en effet atteindre des vitesses supérieures à 30 000 tr.mn⁻¹. L'inconvénient majeur réside dans la nécessité d'utiliser une électronique de commande. Notez que cette électronique est parfois miniaturisée et intégrée dans le boîtier du moteur.

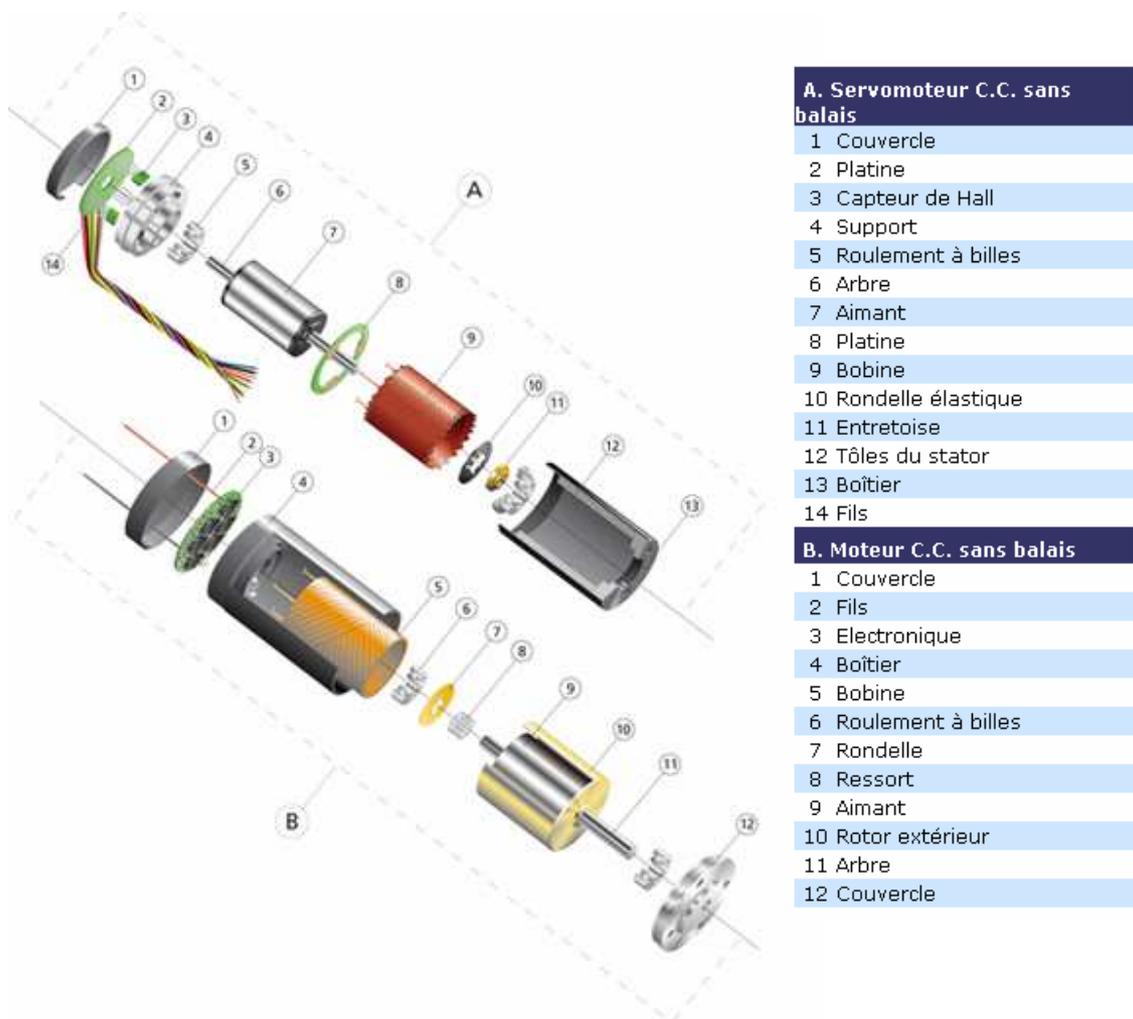


Figure 4: vue éclatée de deux moteurs sans balais.

3.4 Servomoteurs

Servomoteur est la concaténation de moteur et asservissement. Le moteur comporte une électronique intégrée (généralement un contrôleur en boucle fermée) qui asservit la position du moteur (par exemple pour commander une ouverture de vanne).



Figure 5: exemple de servomoteur (à gauche : servomoteur à courant continu, à droite : Brushless)



Figure 6: servomoteur de modélisme démonté.

3.5 Moteurs linéaires

Un moteur linéaire est une sorte de moteur électrique « déroulé ». Le stator est constitué de bobines disposées en ligne. Le champ magnétique permet de faire avancer ou reculer l'axe du moteur qui contient les aimants.

Le principal atout de ces moteurs est la rapidité et la précision des déplacements. Les couples restent faibles, mais cette jeune technologie se développe rapidement.

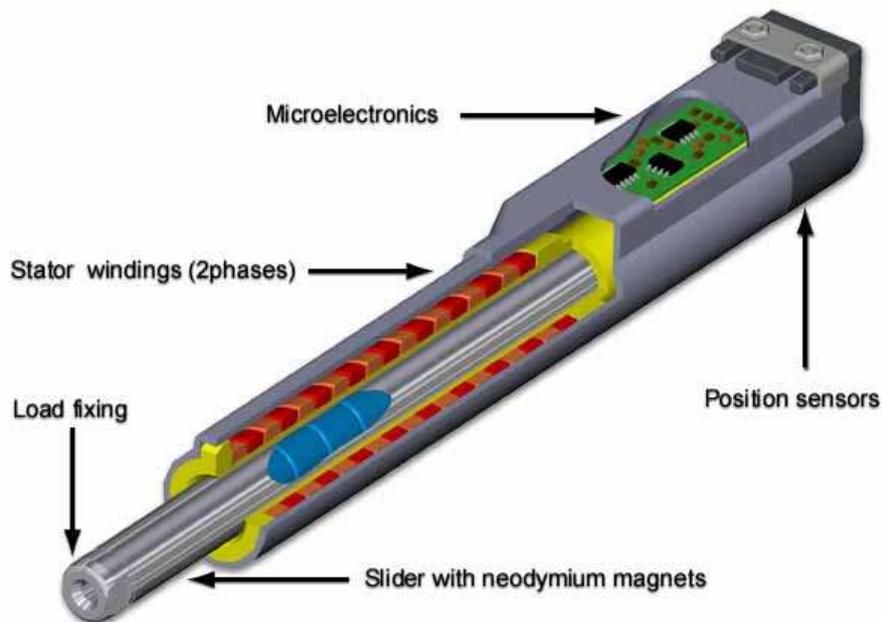


Figure 7: vue en coupe d'un moteur linéaire.

3.6 *Alliages à mémoire de forme*

Les alliages à mémoire de forme (AMF) sont des alliages possédant la capacité de garder en mémoire une forme initiale et d'y retourner même après une déformation. Le retour à la forme mémorisée se fait en franchissant une température critique. Lorsque le fil est traversé par un courant électrique la puissance dissipée permet le franchissement de la température critique. C'est ainsi que fonctionnent les vérins électriques à mémoire de forme.

Par exemple : un vérin de 76 mm au repos avec une course de 20 mm pèse 10 grammes et peut générer une force de 450g. La puissance consommée est importante : 5 watts, les temps de sortie et rentrée du piston sont relativement long : 2secondes. Notez que pour faire sortir le vérin, il faut attendre qu'il refroidisse !

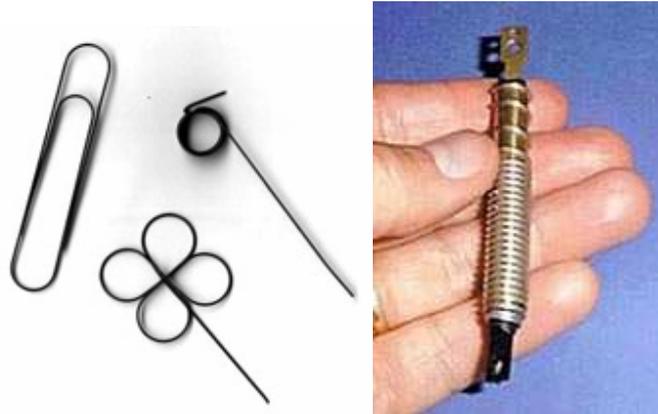


Figure 8: exemple de fils et vérin en alliages à mémoire de forme.

3.7 *Energie pneumatique*

Il est possible d'utiliser de l'énergie pneumatique pour créer un mouvement. Il existe aujourd'hui des pompes miniatures permettant à la fois d'aspirer et de souffler. Ces pompes peuvent être couplées à des vérins ou des ventouses. Il est aisé de les embarquer: elles remplacent avantageusement les bonbonnes d'air comprimé.



Figure 9: pompes miniatures

4. *R-R sans changement de vitesse*

Cette première catégorie de transmission de puissance est aussi appelée accouplement.

Accouplement : se dit d'une liaison établie entre deux organes d'un système, généralement deux arbres, de telle manière que la rotation de l'un entraîne celle de l'autre. C'est aussi le nom donné au dispositif permettant cette liaison (un accouplement peut être rigide, semi-élastique, élastique ou articulé).

4.1 Accouplements rigides

Ce type de liaison consiste à lier de façon rigide les deux arbres d'un système. Généralement, une pièce intermédiaire crée la liaison. Il existe de nombreux montages: vis de pression, serrage par mâchoires, montage en force, clavetage ...

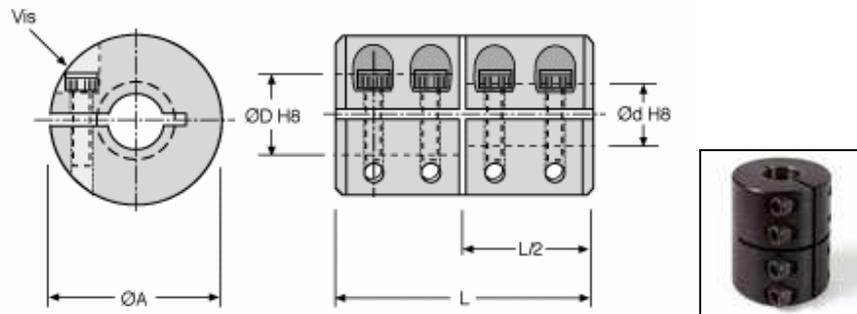


Figure 10: accouplement rigide: serrage par mâchoires

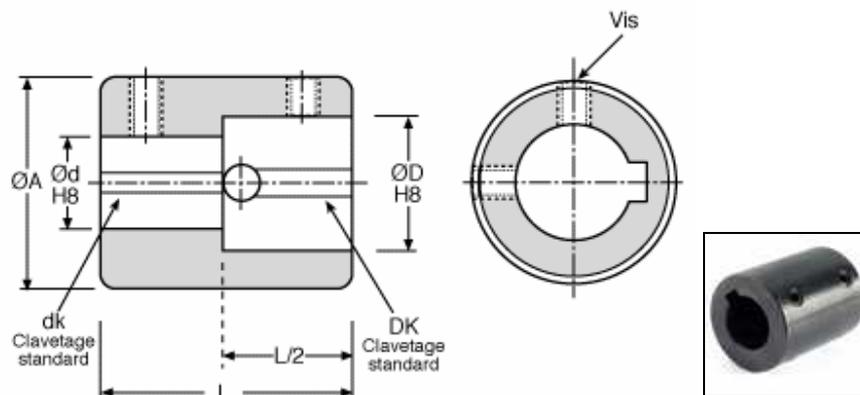


Figure 11: accouplement rigide : serrage par vis de pression

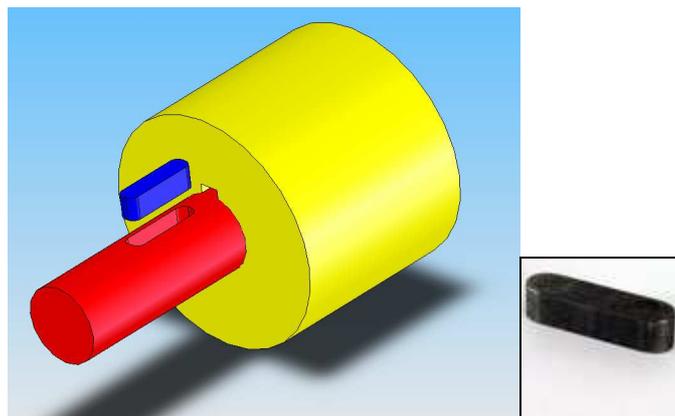


Figure 12: vue éclatée d'un assemblage par clavetage

Le principal inconvénient des accouplements rigides est qu'ils ne tolèrent pas de défaut d'alignement entre les arbres.

4.2 Accouplements semi-élastiques

Il existe des accouplements dits « semi élastiques » qui permettent de rattraper de petits défauts d'alignement (typiquement les défauts d'usinage). Ces accouplements sont généralement constitués de deux parties rigides solidaires des arbres et d'une partie légèrement flexible qui rattrape les défauts d'alignement.

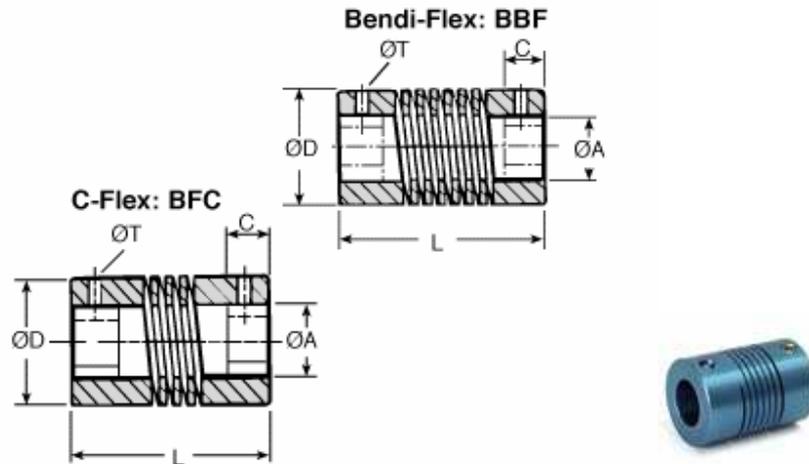


Figure 13: accouplements Bendi-Flex et C-Flex

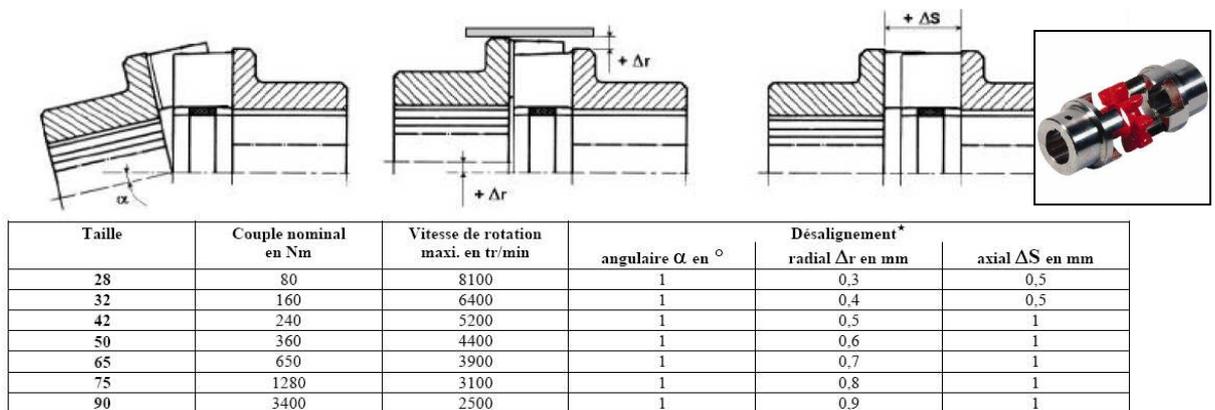


Figure 14: exemple de caractéristiques d'un accouplement Rotex.

Il existe une multitude d'accouplements de ce type. Les critères devant être pris en compte lors du choix sont : le prix, l'encombrement, la vitesse de rotation maximum, le désalignement angulaire, le désalignement axial et radial et la durée de vie.

Ces accouplements présentent généralement d'excellentes propriétés homocinétiques. C'est-à-dire que le mouvement de l'arbre de sortie est fidèle au mouvement de l'arbre moteur.

Homocinétique: se dit d'une liaison qui permet à deux arbres, même non alignés, de conserver une vitesse de rotation identique.

4.3 Accouplements élastiques

Basés sur le même principe que les accouplements semi-élastiques, ceux-ci supportent des désalignements plus importants mais ne conservent pas les propriétés homocinétiques. Sur l'exemple ci-dessous, on devine facilement un retard entre le mouvement des deux arbres. Ce retard est dû à la torsion de la partie flexible.

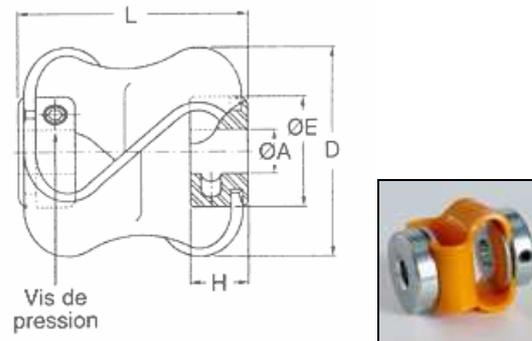


Figure 15: accouplement P-Flex.

4.4 Accouplements articulés

Cette dernière famille d'accouplements permet de corriger des défauts d'alignement très importants. L'utilisation de pièces en mouvement dans les articulations présentent deux inconvénients : l'usure des pièces et le coût de fabrication.

4.4.1 Accouplements Oldham

Un accouplement Oldham est constitué de 3 pièces :

- 2 bagues solidaires des arbres
- 1 patin lié aux bagues par deux liaisons prismatiques

La double liaison prismatique permet au patin de voyager dans un plan perpendiculaire aux arbres tout en transmettant les couples.



Figure 16: accouplement Oldham.

4.4.2 Joints de Cardan

Un joint de Cardan est constitué de fourchettes (en bleu) liées rigidement aux arbres et d'un croisillon (en rouge) lié en liaisons pivots avec les fourchettes.

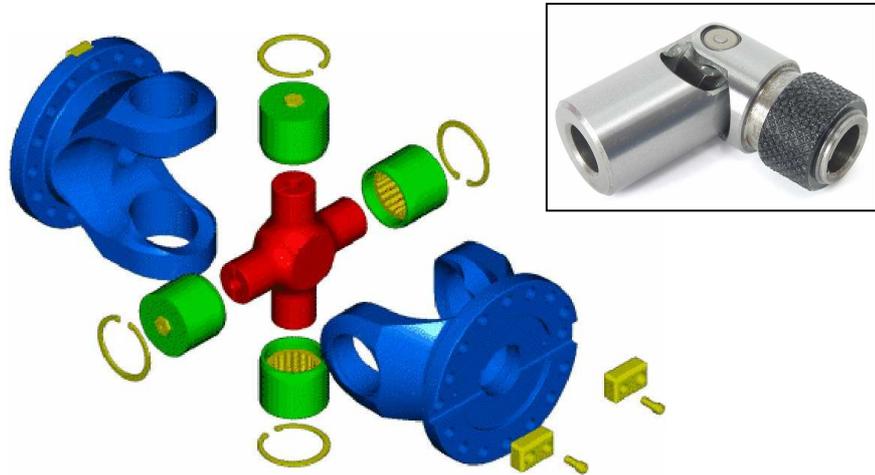


Figure 17: vue éclatée d'un joint de Cardan

Ce type de liaison accepte des angles importants entre l'arbre moteur et l'arbre de sortie. Cet angle est appelé angle de brisure. L'angle de brisure maximum théorique d'un joint de cardan est de 45° . Ce type de liaison n'est pas homocinétique.

4.4.3 Double joints de Cardan

Pour rendre le système homocinétique, il est possible de combiner deux joints de Cardan à condition de les déphaser. Soit la fonction qui lie la vitesse de l'arbre moteur et la vitesse de l'arbre de sortie dans un seul joint de Cardan : $\omega_s = F(\omega_m)$. L'ajout du second joint permet d'obtenir la relation suivante: $\omega_s = F^{-1}(F(\omega_m)) = \omega_m$. Le système redevient homocinétique.

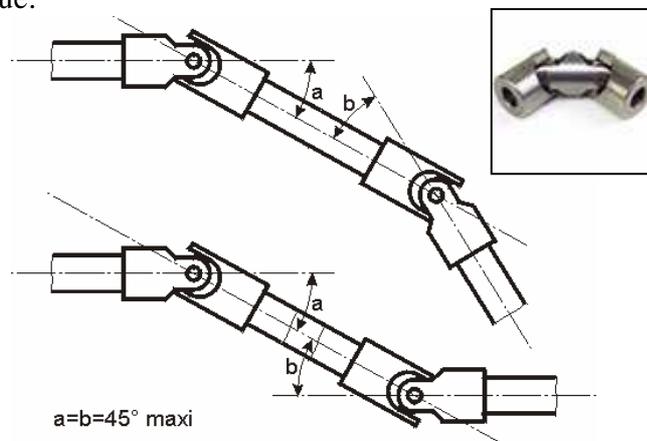


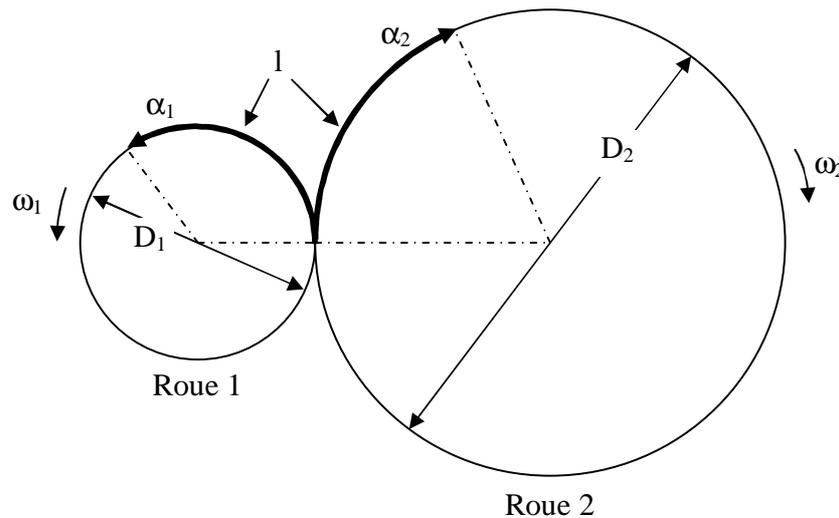
Figure 18: double joints de Cardan

5. R-R avec changement de vitesse à axes parallèles

5.1 Roues de friction

Le principe consiste à presser les roues l'une contre l'autre, c'est le frottement qui en assure la liaison (exemples : la dynamo, le Solex).

Modification de la vitesse



La figure ci-dessus représente une roue motrice (1) de diamètre D_1 qui entraîne une seconde roue (2) de diamètre D_2 . Lorsque la roue (1) effectue une rotation d'angle α_1 , la distance parcourue au point de contact est de $l = \frac{\alpha_1 \cdot D_1}{2}$. Si l'on néglige les glissements entre les deux roues, on peut considérer que la roue entraînée a parcouru la même distance au point de contact. L'angle de rotation est donné par $\alpha_2 = \frac{2 \cdot l}{D_2} = \frac{D_1}{D_2} \cdot \alpha_1$. En dérivant cette équation par rapport au temps, nous obtenons la relation qui lie les vitesses angulaires : $\omega_2 = \frac{D_1}{D_2} \cdot \omega_1$.

Rapport de transmission : c'est un coefficient i sans unité qui lie les vitesses d'entrée et de sortie d'une transmission avec changement de vitesse défini par la relation suivante :

$$i = \frac{\omega_{\text{sortie}} [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]}{\omega_{\text{entrée}} [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]}$$

Dans le cas des roues de friction :

$$i = \frac{D_1}{D_2}$$

Transmission du couple

Couple : désigne l'effort en rotation appliqué à un axe. Le couple s'exprime en Nm.

Soit le couple exercé par la roue (1) Γ_1 . Au point de contact entre les deux roues, la force exercée est perpendiculaire au rayon des roues et son module peut s'exprimer par :

$|F| = \frac{2 \cdot \Gamma_1}{D_1}$. On peut ainsi en déduire le couple exercé sur l'axe de la roue (2) :

$$\Gamma_2 = |F| \cdot \frac{D_2}{2} = \frac{D_2}{D_1} \Gamma_1$$

On en déduit :

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \frac{D_2}{D_1}$$

Ou encore :

$$\frac{\Gamma_2 [Nm]}{\Gamma_1 [Nm]} = \frac{1}{i}$$

Le rapport couple de sortie sur couple d'entrée est inversement proportionnel au rapport des vitesses.

$i < 1$	$i = 1$	$i > 1$
Réducteur (de vitesse)	Pas de changement de vitesse	Augmentation de la vitesse
Augmentation du couple	Pas de changement de couple	Diminution du couple

Le rapport de transmission est aussi appelé rapport de réduction. Il est fréquemment présenté sous la forme : 20:1 (prononcer 20 par 1), ce qui signifie que 20 tours de l'arbre d'entrée équivalent à 1 tour de l'arbre de sortie : $i = \frac{1}{20}$.

Ce mécanisme ne tolère aucun corps gras, il donne lieu à des glissements importants dès que l'effort tangentiel à transmettre est trop élevé.

5.2 Engrenages à denture droite

Dans la transmission du mouvement, pour éviter le glissement, nous utilisons des roues dentées. L'ensemble de deux roues dentées est nommé engrenage. Quand deux roues dentées sont en prise, la petite s'appelle le pignon et la grande conserve le nom de roue.

5.2.1 Cercle primitif

Cercle primitif : c'est un cercle imaginaire de même centre que l'axe de la roue dentée permettant d'appliquer aux engrenages les mêmes relations que pour les roues de friction :

$$i = \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} = \frac{D_a}{D_b} = \frac{\omega_b}{\omega_a}$$

5.2.2 Profil des dents

Il existe un profil presque universel : la développante de cercle. Cela assure un rapport de vitesse constant (liaison homocinétique) et une transmission d'énergie optimum entre les engrenages. Au point de contact entre deux roues, la tangente au profil est commune aux deux dents. L'angle formé par cette tangente et la perpendiculaire au rayons des roues est appelé angle de pression. Parmi les autres propriétés remarquables des engrenages à développante, on peut citer les suivantes :

1. C'est une liaison homocinétique même quand on fait varier l'entraxe.
2. L'usure des surfaces actives est plus régulièrement répartie.
3. Les vibrations sont plus faibles qu'avec un autre profil.

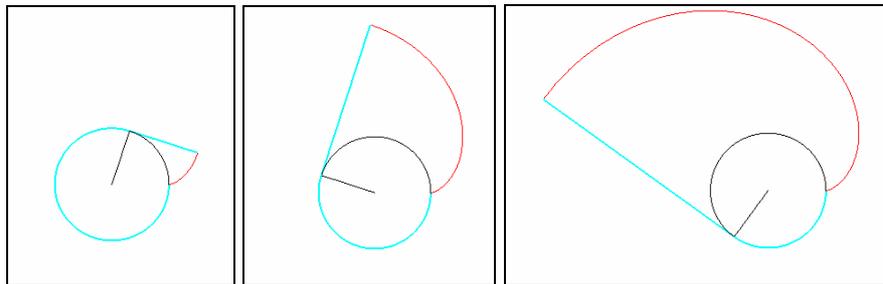


Figure 19: création d'une développante de cercle

Développante du cercle : aussi appelée anti-clothoïde, c'est une courbe plane développante, c'est-à-dire que ses normales sont les tangentes du cercle. C'est la trajectoire d'un point fixe d'un fil que l'on déroule de sa bobine en conservant une tension constante du fil.

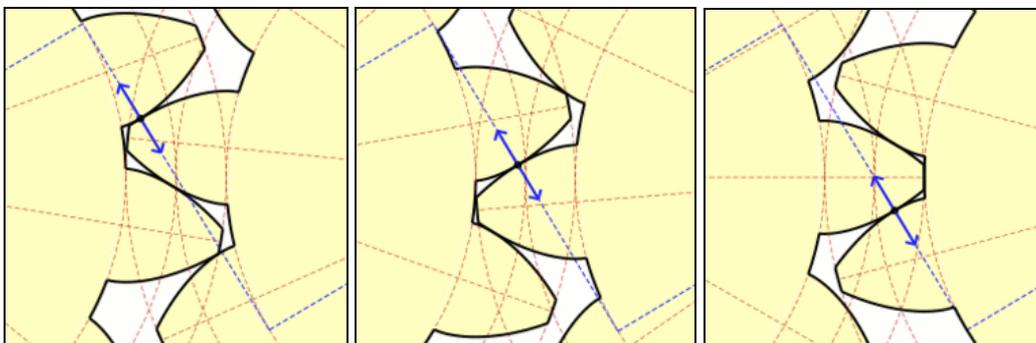


Figure 20: point de contact et répartition de l'effort entre deux dents.

5.2.3 Fabrication

Il existe de nombreux systèmes pour fabriquer les roues dentées. Nous noterons parmi les technologies récentes : le moulage ou l'électroérosion à fil.

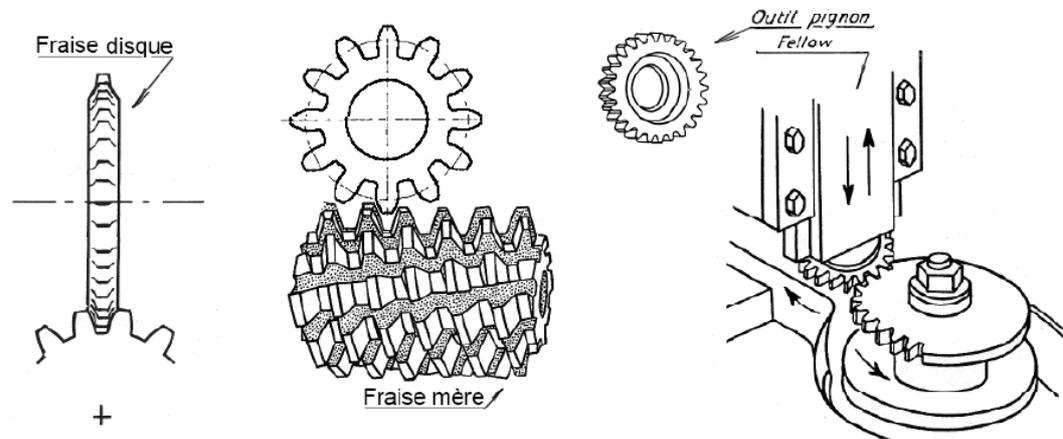


Figure 21: quelques procédés de fabrication d'une roue dentée

Ce type de profil est complexe à fabriquer, pour éviter de multiplier l'outillage et pour permettre la compatibilité entre les fabricants, les tailles des dents ont été standardisées selon leurs modules.

5.2.4 Module

Module (m) : rapport du pas (p) divisé par π . Pour les engrenages à denture droite, cela est équivalent au rapport entre le diamètre primitif et le nombre de dents (Z). Un module de 1 donne un diamètre primitif de 1 mm par dent.

$$m[\text{mm}] = \frac{p[\text{mm}]}{\pi} = \frac{d[\text{mm}]}{Z}$$

Concrètement, le module représente la différence entre le rayon primitif et le rayon externe. Quelques modules standardisés : 0,5 0,6 0,8 1 1,25 1,5 ... 50

5.2.5 Représentation

En dessin industriel, on ne représente pas toutes les dents d'un engrenage. On le représente par son cercle primitif en trait discontinu.

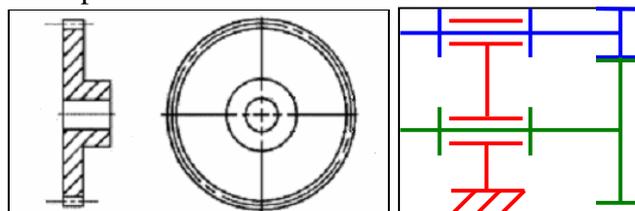


Figure 22: représentation normalisée d'un engrenage (dessin industriel et schéma cinématique)

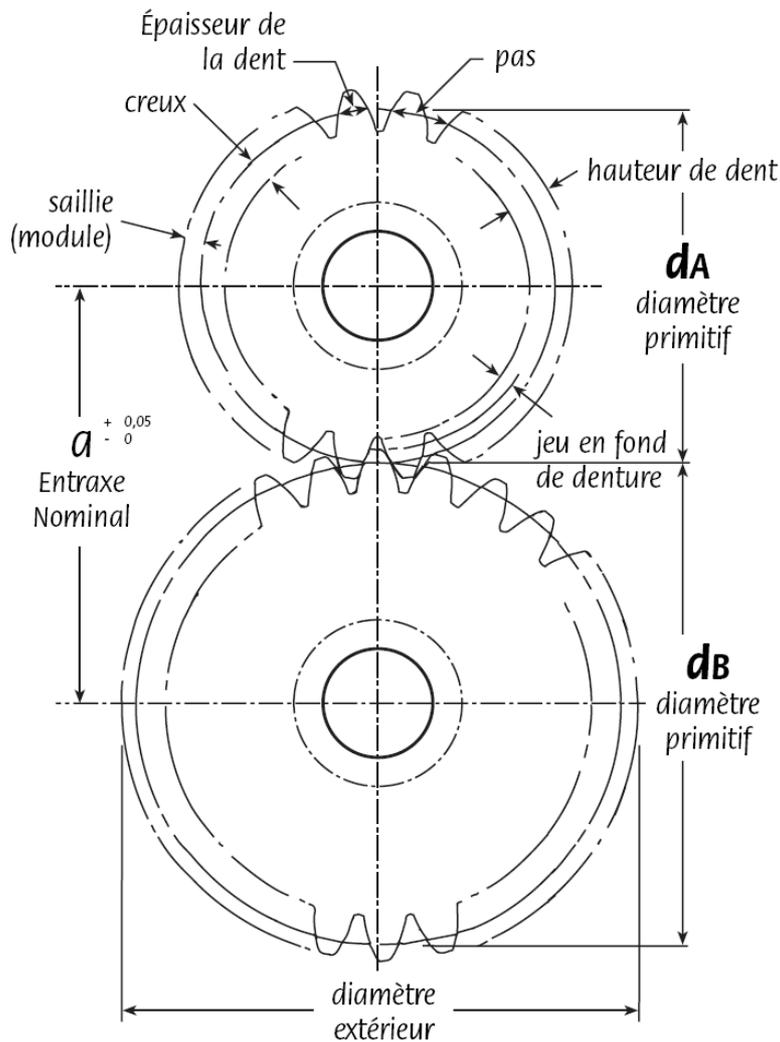


Figure 23: schéma d'un engrenage

5.2.6 Relations sur les engrenages droits

Lorsque le module et le nombre de dents sont connus, tous les autres paramètres peuvent en être déduit :

- **Diamètre primitif** : $d[mm] = m[mm].Z$
- **Pas** : distance entre deux dents le long du cercle primitif :

Angle d'une dent: $\beta_{dent}[rad] = \frac{2.\pi}{Z}$. On en déduit le pas : $p = \frac{d}{2}.\beta_{dent} = \frac{d}{2}.\frac{2.\pi}{Z} = m.\pi$

$$p[mm] = m[mm].\pi$$

- **Diamètre de tête:** $D[mm] = d + 2.m = m.Z + 2.m = (Z + 2).m$

$$D[mm] = (Z + 2).m$$

- **Creux :** pour permettre au système d'engrener, il faut que le fond de la denture (le creux noté h_f) soit plus grand que le module. Par convention :

$$\text{Modules jusqu'à } 1.25 : h_f[mm] = 1,40.m$$

$$\text{Modules supérieurs à } 1.25 : h_f[mm] = 1,25.m$$

- **Hauteur des dents :** $h[mm] = h_f + m$

$$\text{Modules jusqu'à } 1.25 : h[mm] = 2,40.m$$

$$\text{Modules supérieurs à } 1.25 : h[mm] = 2,25.m$$

- **Entraxe :** c'est la distance entre les deux axes des roues dentées

$$h_f[mm] = \frac{d_A + d_B}{2}$$

Tolérance sur l'entraxe : de manière générale, plus le module est petit, plus l'entraxe doit être précis. Par exemple, un jeu de 0.5mm sur l'entraxe exige un module minimum de 2. Si l'entraxe est trop grand, un jeu va apparaître dans la transmission. A l'inverse, s'il est trop court le système va risque de se « coincer », on parle d'interférence entre les dents.

5.2.7 Interférence et usure

Interférence : phénomène parasite qui apparaît lorsque le sommet de la dent d'une roue rencontre le fond d'une dent de l'autre roue. L'interférence peut avoir 3 causes :

- un entraxe ne respectant pas la tolérance
- un défaut de fabrication de la denture (interférence de taillage)
- la différence du nombre de dents entre les deux roues est trop importante.

Pour éviter cette troisième cause, il est important de limiter la différence entre les deux roues :

Z_a	13	14	15	16	17 et plus
Z_b maximum	16	26	45	101	sans limite

Il est également possible d'utiliser des roues avec correction de denture, mais cela modifie l'entraxe.

Pour limiter l'usure des dents, les nombres de dents doivent être si possible choisis premiers entre eux (ce qui permet à chaque dent d'une roue de rencontrer toutes les dents de l'autre).

Durant le mouvement, quand deux dents commencent à engrener il y a un léger choc, source de bruit et d'usure. Pour éviter ce phénomène, il existe des engrenages à denture hélicoïdale.

5.3 Engrenages à denture hélicoïdale

Pour permettre un mouvement continu entre deux roues dentées on utilise des dentures hélicoïdales.

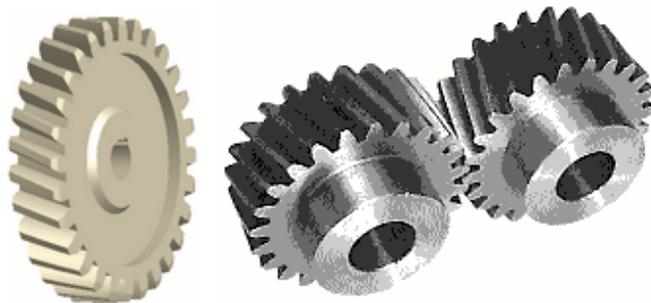


Figure 24: roue et engrenages droits hélicoïdaux

5.3.1 Intérêt

Avantages :

- usure et niveau sonore réduit ; le choc dû à la flexion des dents pendant le passage d'un profil à l'autre est très atténué,
- régularité de la transmission à haute vitesse due au fait qu'il y a toujours plus de deux dents en prise,
- les couples transmis peuvent être plus élevés car le nombre de dents en prise est plus important.

5.3.2 Profil apparent et profil réel

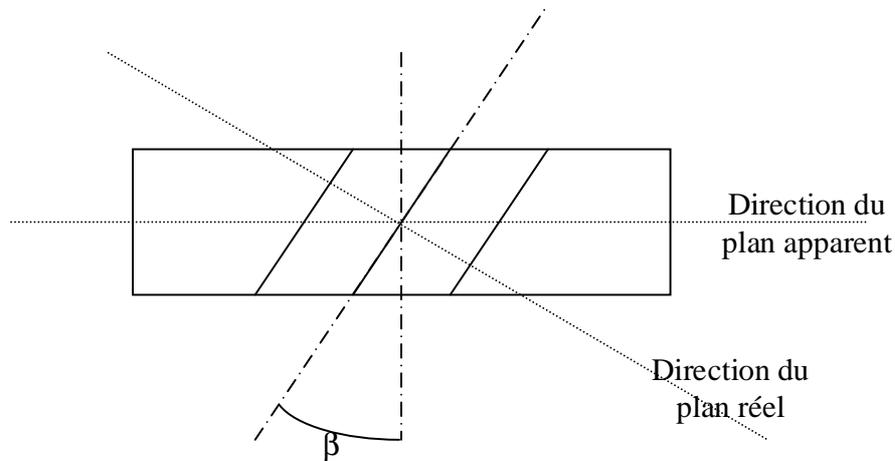


Figure 25: représentation des profils apparents et réels

Profil réel : profil de la denture contenu dans le plan réel, perpendiculaire à l'axe des dents.

Profil apparent : profil de la denture contenu dans le plan apparent, perpendiculaire à l'axe du cylindre primitif.

On en déduit deux modules, le module réel m_r (standardisé) et le module apparent m_a liés par la relation suivante :

$$m_r = m_a \cdot \cos \beta$$

5.3.3 Relations

- Module : $m_r = \frac{p}{\pi}$
- Pas : $p = \frac{m_r}{\pi}$
- Diamètre primitif : $d = \frac{Z \cdot m_r}{\cos \beta}$
- Diamètre de tête : $D = d + 2 \cdot m_r$
- Nombre de dents : $Z = \frac{d \cdot \cos \beta}{m_r}$

Il est possible de conserver le même entraxe entre deux paires de roues tout en changeant le rapport de réduction en jouant sur l'angle d'hélice (boîtes de vitesse).

5.3.4 Sens d'inclinaison

Notez qu'un engrenage à denture inclinée à gauche engrène avec un engrenage à denture inclinée à droite. Le sens d'inclinaison de la denture se vérifie visuellement. Poser

l'engrenage à plat sur une table, si les dents montent vers la droite, la denture est inclinée à droite, si les dents montent vers la gauche, la denture est inclinée à gauche.

5.3.5 Effort axial

Le principal inconvénient de ce type d'engrenage est l'effort axial créé par l'angle d'hélice :

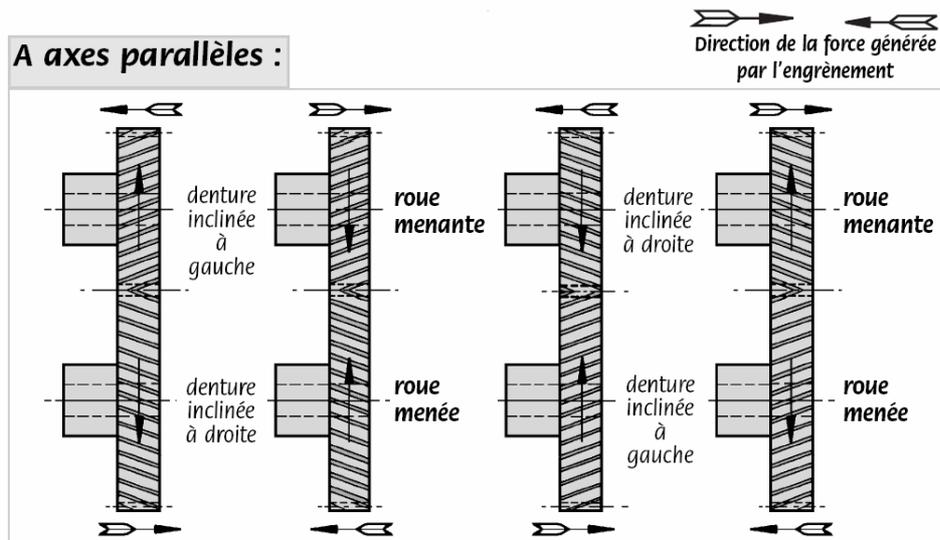


Figure 26: direction des forces axiales dans les engrenages à denture hélicoïdale

Il existe un moyen d'annuler la force axiale: utiliser des engrenages à denture en chevrons.

5.4 Engrenages à denture en chevrons

En plaçant deux engrenages hélicoïdaux de sens d'inclinaison opposés côte à côte sur le même axe, il est possible d'annuler les efforts axiaux.



Figure 27: engrenage à denture en chevrons qui a inspiré le logo de la marque Citroën

5.5 Engrenages internes ou couronnes

Les couronnes s'utilisent avec des roues dentées externes de diamètre plus petit. Les équations sont similaires à celles présentées ci-dessus. Notez que le sens de rotation en sortie est le même qu'en entrée.

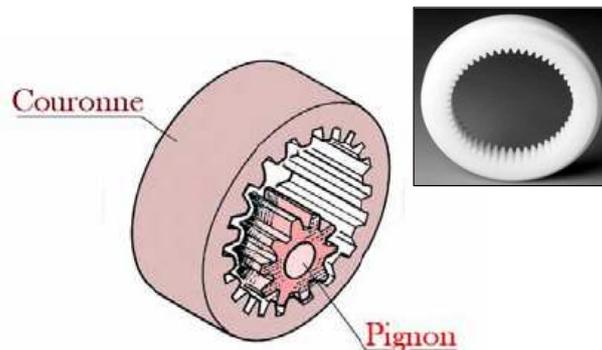


Figure 28: engrenage interne

5.6 Roues à rattrapage de jeu

Comme leur nom l'indique, ces roues permettent de rattraper le jeu de fonctionnement d'un couple de roues dentées droites classique. Des ressorts sont placés dans des gorges entre deux roues de même dimensions, solidarisés axialement par un circlips. Au montage, il faut décaler les deux disques de quelques degrés pour comprimer les ressorts afin de pouvoir rattraper le jeu.

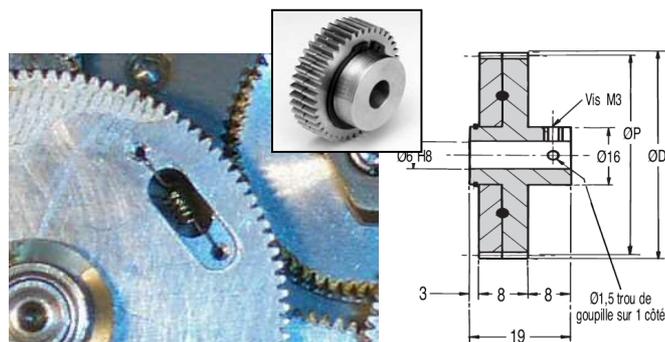


Figure 29: roues à rattrapage de jeu

6. R-R renvois d'angle

6.1 Engrenages droits à denture conique

Ces engrenages permettent un renvoi d'angle à 90°. Ce type d'engrenage nécessite un montage précis : les sommets des deux cônes doivent être confondus. .

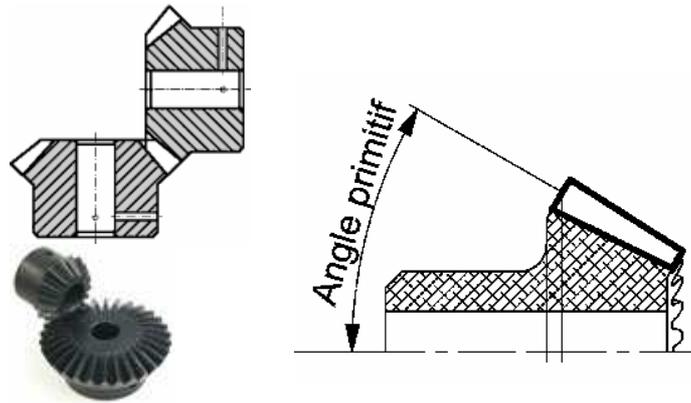
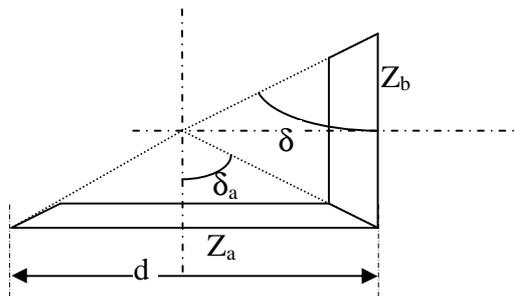


Figure 30: engrenage à denture conique

Comme pour les engrenages droits, le rapport des vitesses (et des couples) est donné par :

$$i = \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} = \frac{D_a}{D_b} = \frac{\omega_b}{\omega_a}$$

- Angle primitif :



- L'angle primitif δ_a est donné par : $\tan \delta_a = \frac{Z_a}{Z_b}$

Noter que l'angle primitif est une propriété de la roue a (la roue b aura un angle primitif de $\delta_b=90^\circ-\delta_a$). Cette propriété est liée par la relation ci-dessus au nombre de dents de la roue 2. Les engrenages coniques sont conçus pour fonctionner par paire.

- Diamètre primitif : c'est le diamètre de la base du cône primitif :

$$d_a = m.Z_a$$

- Diamètre de tête : c'est le diamètre extérieur de l'engrenage (nécessaire pour calculer l'encombrement) :

$$D_a = d + 2.m.\cos(\delta_a)$$

6.2 Engrenages spiro-coniques

Le bruit généré par des engrenages coniques à denture droite peut être atténué par l'utilisation de coniques à denture hélicoïdale (Spiro-coniques)



Figure 31: engrenages spiro-coniques

Comme pour les engrenages hélicoïdaux, un engrenage à avec une denture à gauche entraîne avec une denture à droite.

Ce type d'engrenage est utilisé dans l'automobile pour entraîner la couronne des différentiels.



Figure 32: vue intérieure d'un différentiel de voiture

6.3 Engrenages hélicoïdaux à axes croisés

Ce type d'engrenage permet de réaliser un renvoi d'angle. L'engrènement est progressif grâce à l'inclinaison de la denture. Le nombre de dents en prise est important, ce qui assure une continuité de l'engrènement. Le renvoi d'angle obtenu est plus doux et plus silencieux que celui obtenu avec des engrenages coniques droits. Une roue hélicoïdale à axes croisés à denture inclinée à droite s'engrène avec une roue hélicoïdale à axes croisés à denture inclinée à gauche.

Ce type de transmission présente un faible rendement et crée des efforts axiaux.

Noter qu'ici, les axes ne sont pas concourants.

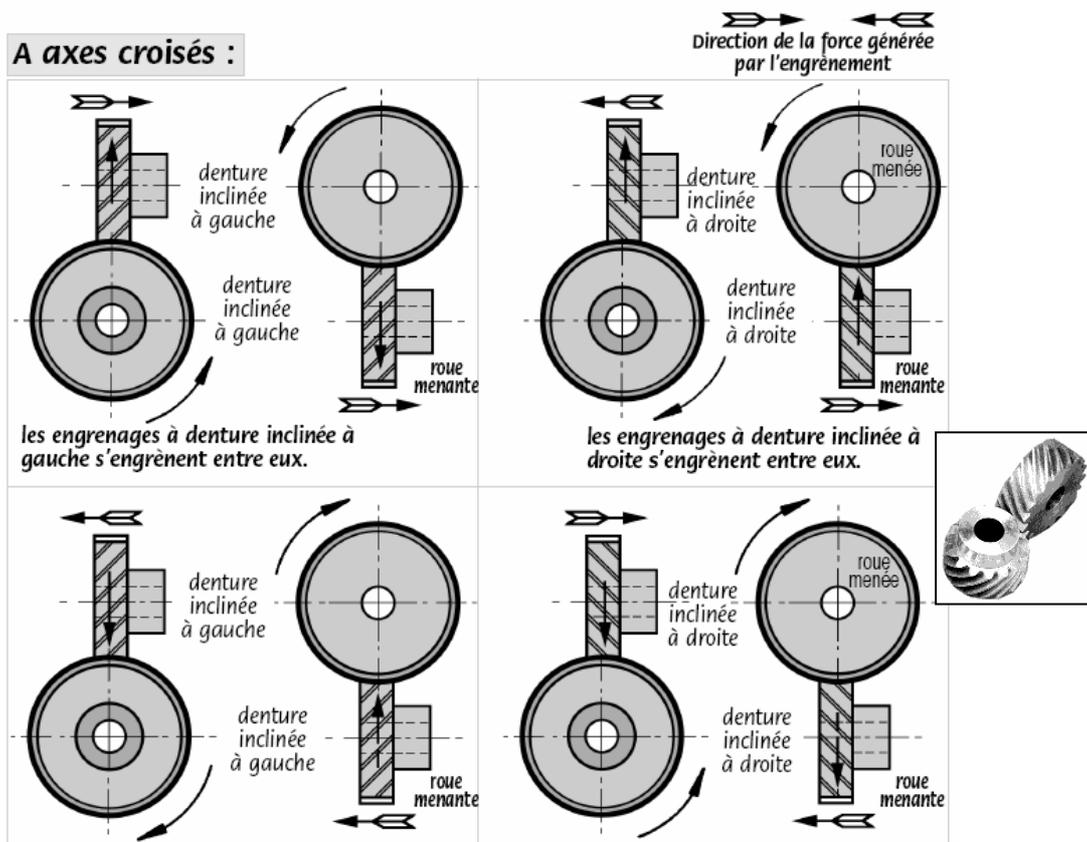


Figure 33: efforts axiaux dans les renvois d'angle hélicoïdaux

6.4 Engrenage gauche

Vis sans fin : cylindre comportant une ou plusieurs cannelures hélicoïdales. Associée à une roue dentée, elle constitue un engrenage gauche, dans lequel elle se comporte comme une roue à n dent (n étant le nombre de cannelures). On appelle aussi ce système roue et vis sans fin.



Figure 34: engrenage gauche

La roue répond aux propriétés présentées précédemment, concernant la vis sans fin :

- Diamètre de primitif :

$$d_{vis} = \frac{p_{vis} \cdot Z_{vis}}{\pi \cdot \tan \beta_{vis}}$$

avec :

- p_{vis} , le pas ($p_{vis} = p_{roue}$)
- Z_{vis} , nombre de filets
- β_{vis} , angle d'hélice ($\beta_{vis} + \gamma_{roue} = 90^\circ$)

- Diamètre de tête :

$$D_{vis} = (2xm) + d_{vis}$$

- Angle d'hélice :

$$\beta_{vis} = \frac{(m \cdot Z_{vis})}{d_{vis}}$$

- Entraxe nominal :

$$E = \frac{d_{roue} + d_{vis}}{2}$$

- Rapport de transmission

$$i = \frac{\Gamma_{vis}}{\Gamma_{roue}} = \frac{D_{vis}}{D_{roue}} = \frac{\omega_{roue}}{\omega_{vis}}$$

La vis ayant généralement 1 ou 2 filets cette transmission autorise généralement des réductions importantes.

Utilisation classique : tension des cordes sur les instruments de musique.

La particularité de ce type de liaison réside dans la possibilité d'en faire une liaison irréversible. Selon l'angle d'hélice : la vis peut entraîner la roue, mais la roue ne peut pas entraîner la vis. La liaison est réversible si $\beta_{vis} > 6$ à 10° .

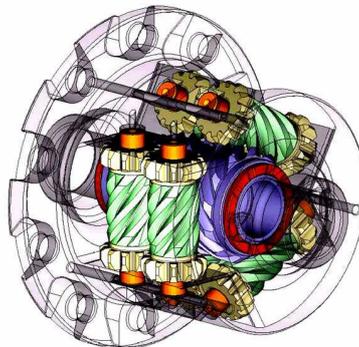


Figure 35: illustration des engrenages gauches dans les différentiels TORSEN (TORque SENsor)

7. R-R Réducteurs

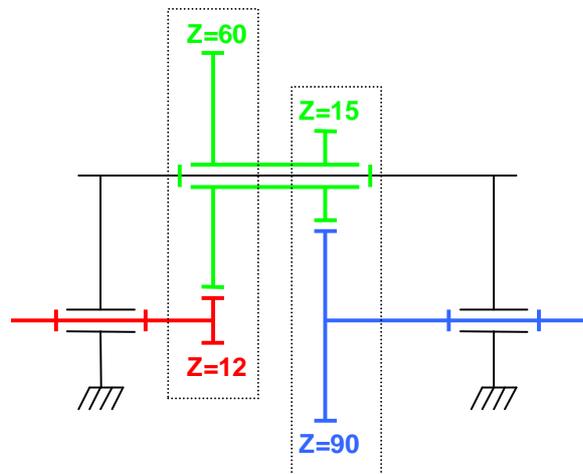
7.1 Réducteur à étages

Les réducteurs à étages sont constitués de plusieurs trains d'engrenages (droit ou hélicoïdaux) placés en cascade. Dans un réducteur, la roue du train de l'étage n est solidaire du pignon de l'étage $n+1$.



Figure 36: réducteur à étage.

Soit le schéma cinématique du réducteur à étage suivant :



L'arbre d'entrée est nécessairement constitué d'un pignon, il s'agit donc de l'arbre rouge. Le premier étage possède un rapport de 5:1 et le second étage 6 :1. Le réducteur présente donc un rapport de 30 :1. Pour 30 tours de l'arbre d'entrée, l'arbre de sortie fait un tour.

De manière générale le rapport de réduction d'un réducteur à étage est donné par :

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}}$$

avec n nombre de contacts extérieurs.

Pour diminuer les coûts de fabrication, les premiers étages (supportant des couples moins importants) sont parfois proposés avec une pignonerie en plastique.

7.2 Réducteur planétaire ou épicycloïdal

A encombrement équivalent, les réducteurs planétaires peuvent supporter des couples et des rapports de réductions plus élevés que les réducteurs à étage.

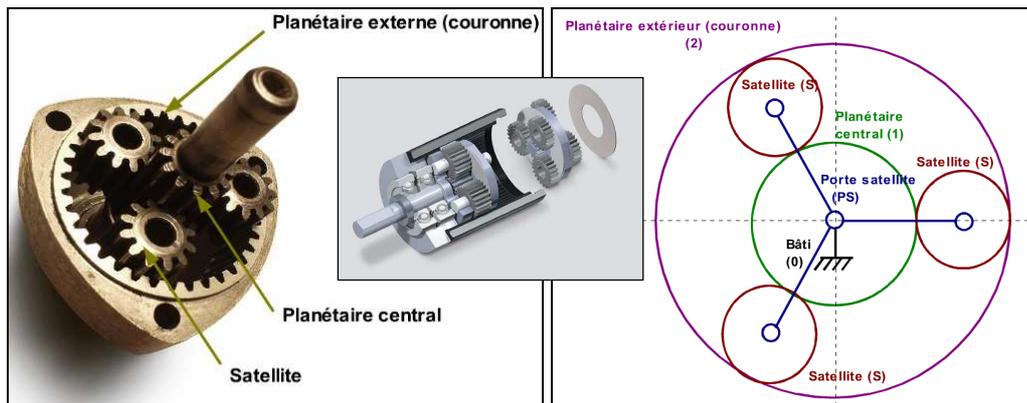
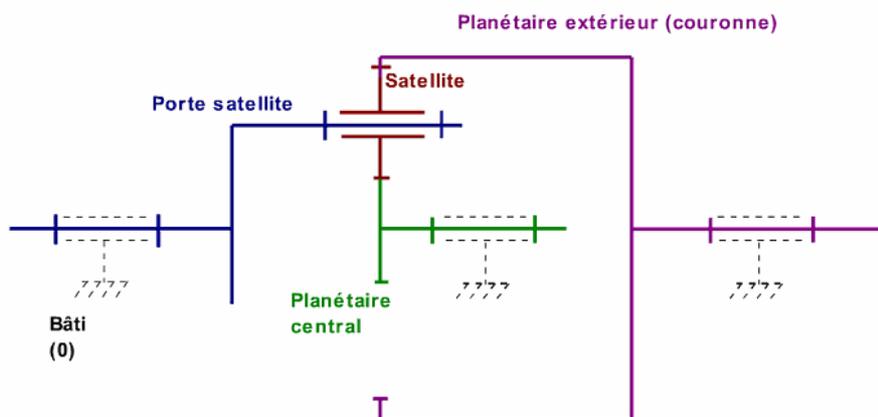


Figure 37: réducteurs planétaires

Il existe 4 types de réducteurs épicycloïdaux.

7.2.1 Train épicycloïdal de type 1

Schéma cinématique général :



Pour fonctionner, au moins une des pièces (porte satellite, planétaire central ou extérieur) doit être fixe avec le bâti.

Calcul de la loi liant les vitesses des différentes pièces :

Prenons comme repère de référence le porte satellite.

$$\frac{\omega_C}{\omega_S} = \frac{Z_S}{Z_{PE}},$$

de même : $\frac{\omega_{PC}}{\omega_S} = \frac{Z_S}{Z_{PC}},$

on en déduit : $\frac{\omega_{PE}}{\omega_{PC}} = \frac{Z_S \cdot Z_{PC}}{Z_S \cdot Z_C}.$

Le système obéit aux loi des trains à étages (noter que les satellites sont à la fois roues menantes et menées) :

$$\frac{\omega_{PE}}{\omega_{PC}} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}}$$

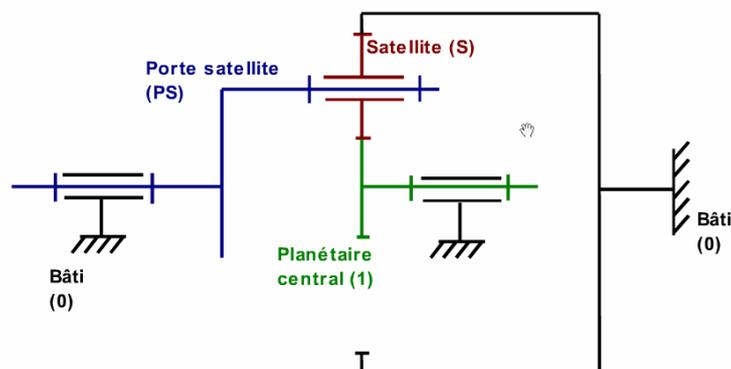
Le porte satellite, le planétaire central et la couronne tournent autour du même axe, nous pouvons donc effectuer un changement de repère pour ramener l'équation ci-dessus dans un repère lié au bâti :

$$\frac{\omega_{PE} - \omega_{PS}}{\omega_{PC} - \omega_{PS}} = (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}} = r$$

Cette formule est la formule de Willis. r est appelé la raison du train.

La formule de Willis est une équation à 3 inconnues, pour obtenir le rapport de réduction du système, il est nécessaire de supprimer une inconnue, c'est-à-dire rendre une pièce solidaire du bâti.

1^{er} cas : planétaire extérieur bloqué



Bloquer la rotation de la couronne revient à écrire : $\omega_{\text{Couronne}} = 0$

Le formule de Willis devient :

$$\frac{\omega_{PS}}{\omega_{PC} - \omega_{PS}} = \frac{Z_S \cdot Z_{PC}}{Z_S \cdot Z_{PE}}$$

La formule se simplifie :

$$\frac{\omega_{PS}}{\omega_{PC} - \omega_{PS}} = \frac{Z_{PC}}{Z_{PE}}$$

$$\omega_{PS} \cdot Z_{pe} = \omega_{PC} \cdot Z_{PC} - \omega_{PS} \cdot Z_{PC}$$

$$\frac{\omega_{PS}}{\omega_{PC}} = \frac{Z_{PC}}{Z_{pe} + Z_{PC}}$$

Par exemple, un réducteur ayant les caractéristiques suivantes :

- 40 dents sur le planétaire central
- 80 dents sur la couronne
- 20 dents sur les satellites

$$\frac{\omega_{PS}}{\omega_{PC}} = \frac{40}{80 + 40} = \frac{1}{3}$$

2^{ème} cas : porte satellite bloqué

Cela revient à un train d'engrenages classique déjà étudié dans le repère lié au porte satellite.

$$\frac{\omega_{pe}}{\omega_{PC}} = \frac{Z_{PC}}{Z_{pe}}$$

Dans notre exemple :

$$\frac{\omega_{pe}}{\omega_{PC}} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

3^{ème} cas : planétaire central bloqué

Comme pour le premier cas, on peut calculer :

$$\frac{\omega_{PS}}{\omega_{pe}} = \frac{Z_c}{Z_C - Z_{PC}}$$

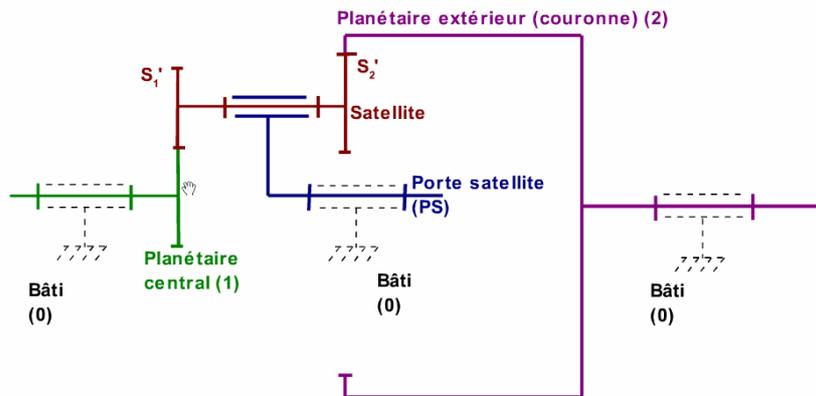
Dans notre exemple :

$$\frac{\omega_{PS}}{\omega_C} = \frac{80}{80-40} = \frac{1}{2}$$

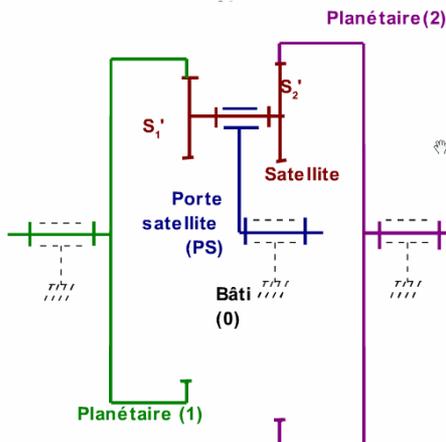
7.2.2 Trains épicycloïdaux de types 2,3 et 4

Dans les réducteurs de type 1, les satellites sont à la fois roues menantes et menées. Dans les types 2,3 et 4, les satellites sont constitués de deux roues : une qui engraine avec la couronne et une avec le planétaire central

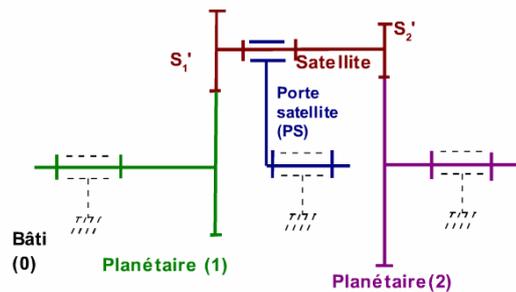
Type 2 :



Type 3 :



Type 4 :



Les trains de type 2,3 et 4 sont également régis par la formule de Willis (la démonstration est similaire aux types 1):

$$\frac{\omega_{pe} - \omega_{PS}}{\omega_{PC} - \omega_{PS}} = (-1)^n \cdot \frac{\Pi Z_{menantes}}{\Pi Z_{menées}}$$

La seule différence est que les satellites ne pourront plus être à la fois menant et menés.

Remarque : avec un réducteur de type 4, il est possible d'obtenir un rapport de réduction infini toutefois, cela est difficilement réalisable en pratique :

- Le nombre de dents doit être entier (sauf si c'est un réducteur à roues de frictions)
- Le rendement devient médiocre lorsque le rapport de réduction augmente.

7.2.3 Condition de montage des trains épicycloïdaux

Condition sur le module

Comme pour tous les engrenages, deux roues ne peuvent engrener que si elles ont un module identique.

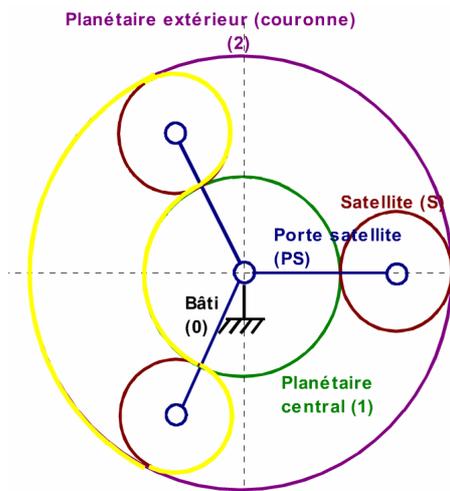
Condition d'entraxe

Pour fonctionner, il faut que :

$$d_{pe} = d_{PS} + 2.d_S, \text{ or } d = m.Z \text{ donc } Z_{pe} = Z_{PS} + 2.Z_S, \text{ on en déduit : } \boxed{Z_{pe} - Z_{PS} = 2.Z_S}$$

Règle dite du « haricot »

Le train épicycloïdal dispose de n satellites (en général 3). Pour que les satellites puissent engrener à la fois avec la couronne et avec le planétaire central, il faut que le nombre de dents comptées sur le contour jaune (en forme de haricot) soit un nombre entier.



$$\frac{Z_{pe}}{n} + \frac{Z_{PS}}{n} + \frac{Z_S}{2} + \frac{Z_S}{2} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{Z_{pe}}{n} + \frac{Z_{PS}}{n} + Z_S \in \mathbb{N}$$

Le nombre de dents des satellites étant forcément entier :

$$\frac{Z_{pe} + Z_{PS}}{n} \in \mathbb{N}$$

$Z_e + Z_{PS}$ doit être un multiple du nombre de satellites.

7.3 Réducteurs trochoïdaux

Ce sont des réducteurs constitués d'une couronne et d'une roue dentée comportant une dent de moins que la couronne. La roue tourne autour d'un palier excentré par rapport à l'arbre d'entrée. A chaque tour de l'arbre d'entrée, la roue se décale d'une dent par rapport à la couronne. Le rapport de réduction est donné par la formule :

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{1}{Z_c}$$

L'arbre d'entrée est l'arbre central, l'arbre de sortie est lié avec la roue dentée.

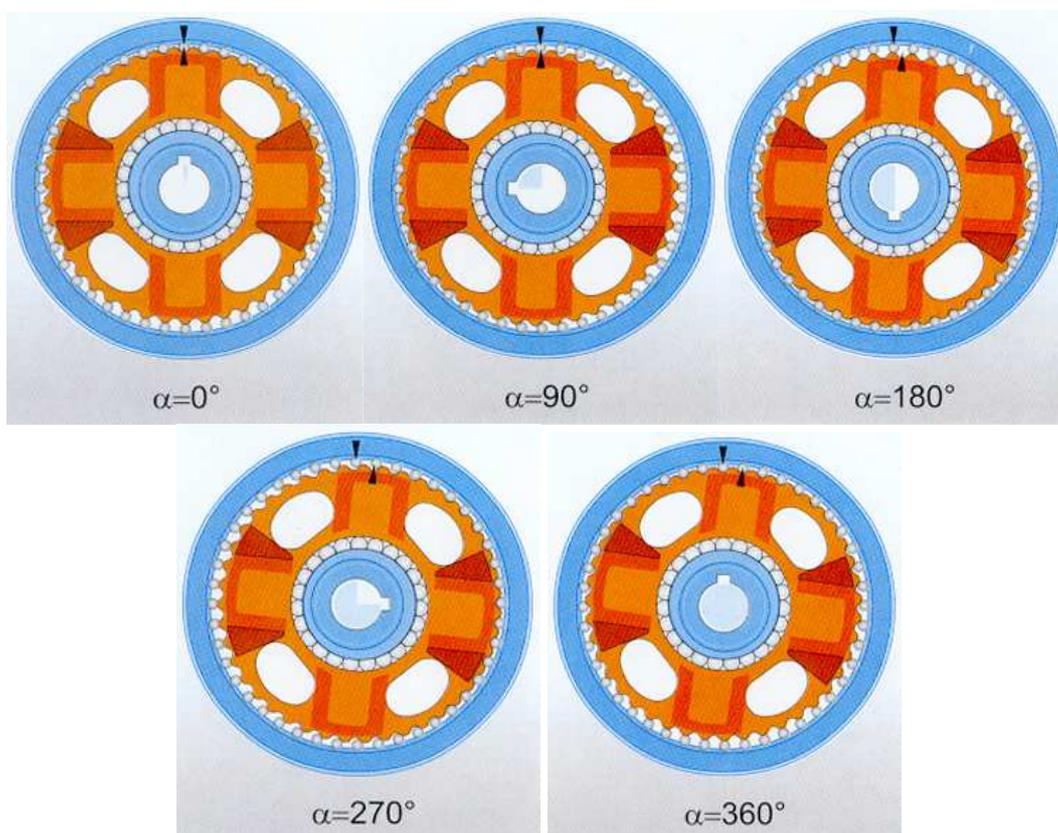


Figure 38: principe d'un réducteur trochoïdal

7.4 Harmonic drive

Le principe de fonctionnement d'un harmonic drive est le même que pour le réducteur trochoïdal, sauf que la roue dentée est souple. Elle se déforme en épousant la circonférence du moyeu oval.

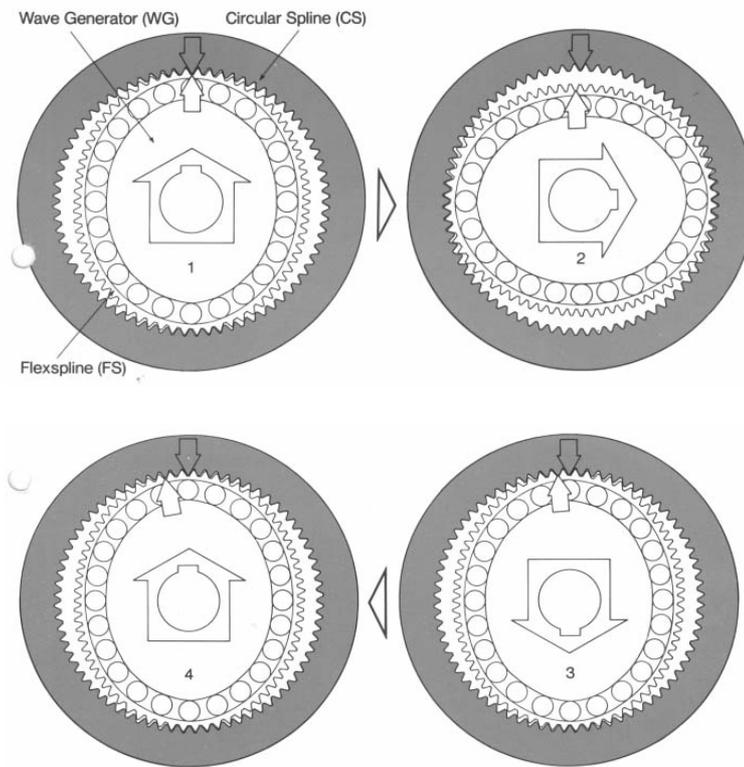


Figure 39: principe d'un harmonic drive

Ce type de réducteur présente des caractéristiques particulièrement intéressantes, notamment des rapports de réduction très élevés. Ils sont utilisés dans de nombreux domaines d'application comme l'aérospatiale, la robotique industrielle ou l'industrie automobile.

8. R-R Poulies courroies

Courroie : lien flexible destiné à assurer une transmission de puissance entre un arbre moteur et un arbre récepteur dont les axes peuvent occuper diverses positions relatives.

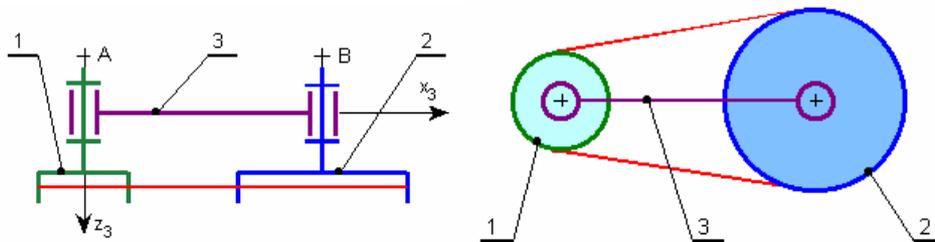


Figure 40: schéma cinématique d'une liaison par poulie courroie

8.1 Hypothèses

Les équations régissant les systèmes poulies courroies sont basées sur 3 hypothèses :

- La courroie est inextensible : en pratique, les courroies sont armées avec une tresse métallique.
- La courroie reste tendue: il faut prévoir un tendeur soit sur la courroie, soit prévoir un réglage sur une des deux poulies (modifier l'entraxe).
- Il y a non glissement entre la courroie et les poulies : en pratique, choisir des courroies crantées (on parle de courroie synchrone).

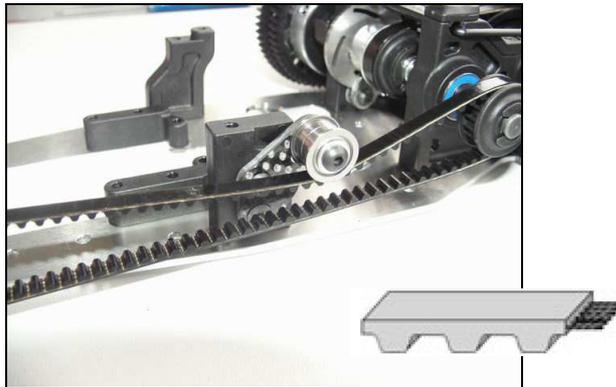


Figure 41: photo d'un tendeur et illustration d'une courroie crantée armée.

8.2 Rapport de transmission

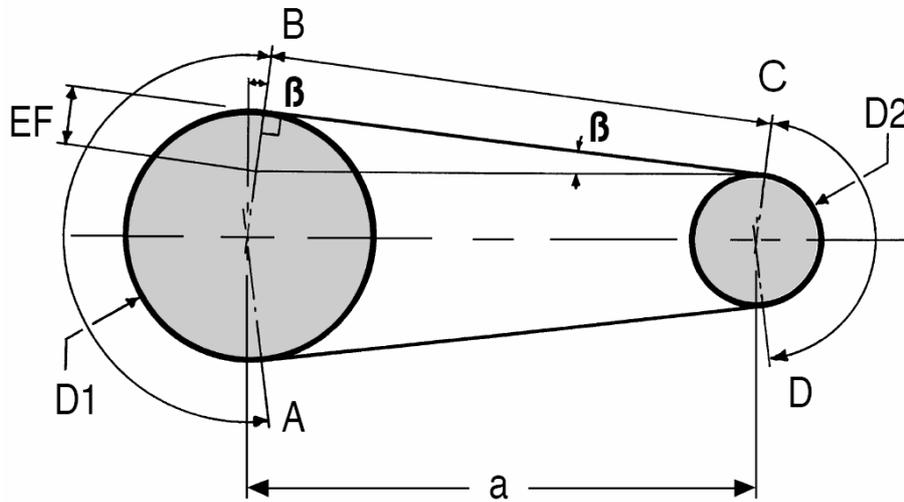
Sur la Figure 40, voici la relation liant les couples et les vitesses de rotation :

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

avec :

- $\omega_{i/3}$: vitesse de rotation de la pièce i par rapport au bâti 3.
- Γ_i : couple exercé par/sur la pièce i
- d_i : diamètre primitif de la poulie i

8.3 Longueur de la courroie



La longueur totale de la courroie est donnée par :

$$L = 2.BC + AB + CD$$

L'angle β est donné par :

$$\sin \beta = \frac{EF}{a} \Rightarrow \beta = \sin^{-1} \left(\frac{d_1 - d_2}{2.a} \right)$$

La longueur BC est donnée par :

$$\cos \beta = \frac{BC}{a} \Rightarrow BC = a.\cos \beta$$

La longueur AB est donnée par :

$$AB = \pi \frac{d_1}{2} + 2.\beta \frac{d_1}{2} = d_1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)$$

De même la longueur CD est donnée par :

$$CD = \pi \frac{d_2}{2} - 2.\beta \frac{d_2}{2} = d_2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

Le nombre de dents de la courroie est donné par :

$$Z = \frac{L}{p}, \text{ p étant le pas.}$$

8.4 Normalisation des courroies

Il existe 4 types de courroies (classées par ordre de performance) : CTD, T/AT, HTD, et les courroies hautes performances (GT2). La résistance est accrue selon les matériaux de la courroie (polymère, polyuréthane), de l'armature (fibre de verre, acier, kevlar...) et surtout du profil de la denture (arrondi, trapézoïdal...). Notez que les courroies les plus rigides présentent un diamètre d'enroulement minimum qui est relativement important, ce qui bride leur utilisation dans les petits mécanismes.

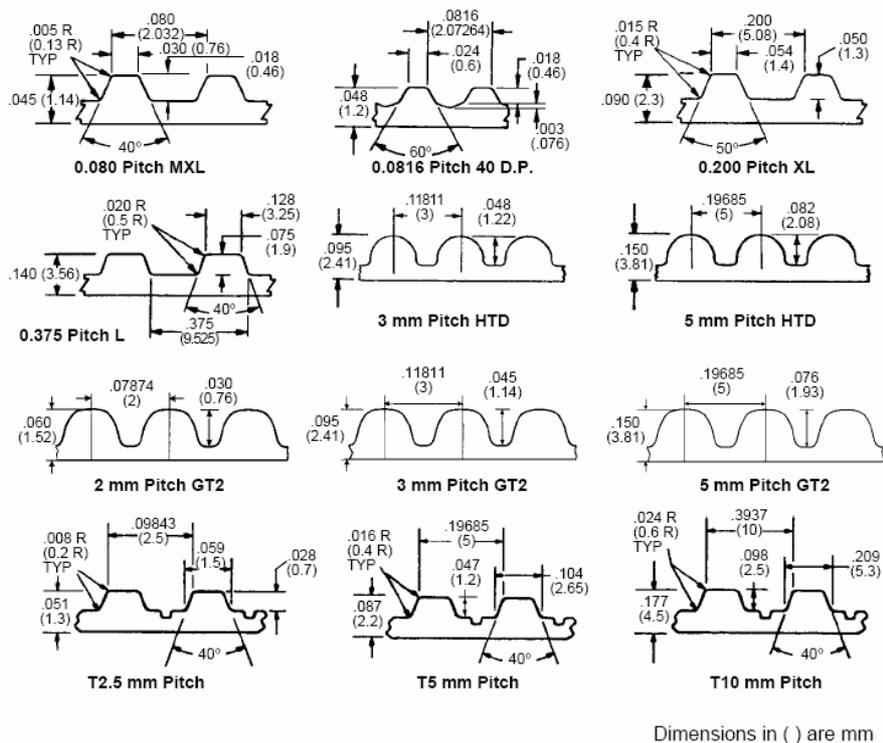


Figure 42: illustration des différents profils de denture des courroies

9. Transformation de mouvement R-T

9.1 Vis et écrous trapézoïdaux (ou vis mère)

Il s'agit d'une vis (généralement menante) tournant autour de son axe principal qui entraîne un écrou en translation. Pour un tour de la vis, l'écrou avance du pas de l'hélice, la vitesse d'avance linéaire de l'écrou est donnée par :

$$v_{\text{écrou}} [m.s^{-1}] = \frac{P_z}{2\pi} \cdot \omega_{\text{vis}} [rad.s^{-1}] = \frac{P_x \cdot Z}{2\pi} \cdot \omega_{\text{vis}}$$



Figure 43: de gauche à droite : vis et écrou standards, vis à billes et vis à rattrapage de jeu
 Les propriétés de la vis sont identiques à celles des vis pour les engrenages gauches.

Les vis mères sont classées en 3 catégories :

- Les vis et écrous standard qui présentent généralement un jeu conséquent et un rendement moyen.
- Les vis et écrous à billes présentent un rendement supérieur et un jeu réduit. Notez qu'il ne faut jamais sortir l'écrou d'une vis à billes.
- Les vis à rattrapage de jeu offrent une précision élevée : la noix est constituée d'un ressort comprimé entre deux écrous.

Réversibilité : dépend de l'angle d'inclinaison des filets de la vis.

9.2 Pignon crémaillères

Une crémaillère est une barre garnie de dents. D'un point de vue mathématique, elle peut être assimilée à une roue dentée (à denture droite ou hélicoïdale) de diamètre infini. Les crémaillères sont standardisées et classées par module afin de pouvoir être combinées avec les roues dentées. La relation qui lie la vitesse linéaire de la crémaillère avec la vitesse angulaire du pignon est donnée par :

$$v_{Crémaillère} [m.s^{-1}] = \frac{d_r}{2} . \omega_{vis} [rad.s^{-1}]$$

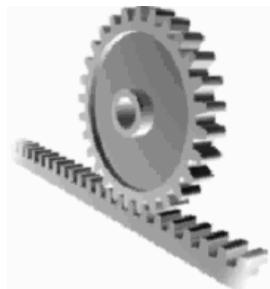


Figure 44: ensemble pignon-crémaillère

Réversibilité : Ce système est réversible.

Les crémaillères sont utilisées dans les directions de voitures.

9.3 Cames-suiveurs

Une came est une pièce tournante, généralement disque non circulaire à saillie ou encoche, servant à transformer un mouvement de rotation en un mouvement de translation. La pièce en contact avec le profil de la came, le suiveur, est alors mise en mouvement. Le suiveur est généralement maintenu en contact par un ressort (Motos Ducati).

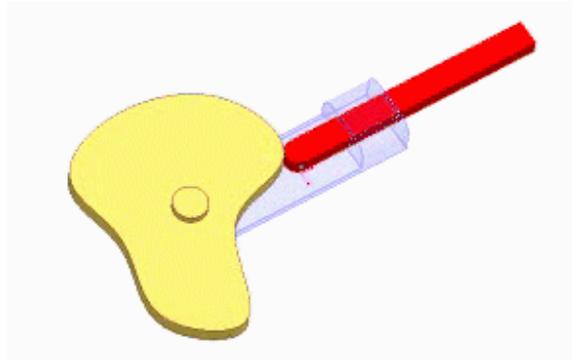


Figure 45: Illustration d'une came et de son suiveur

Ce type de mécanisme permet de créer des mouvements linéaires complexes. Lorsque plusieurs cames sont montées sur le même arbre, on appelle cette pièce un arbre à came.

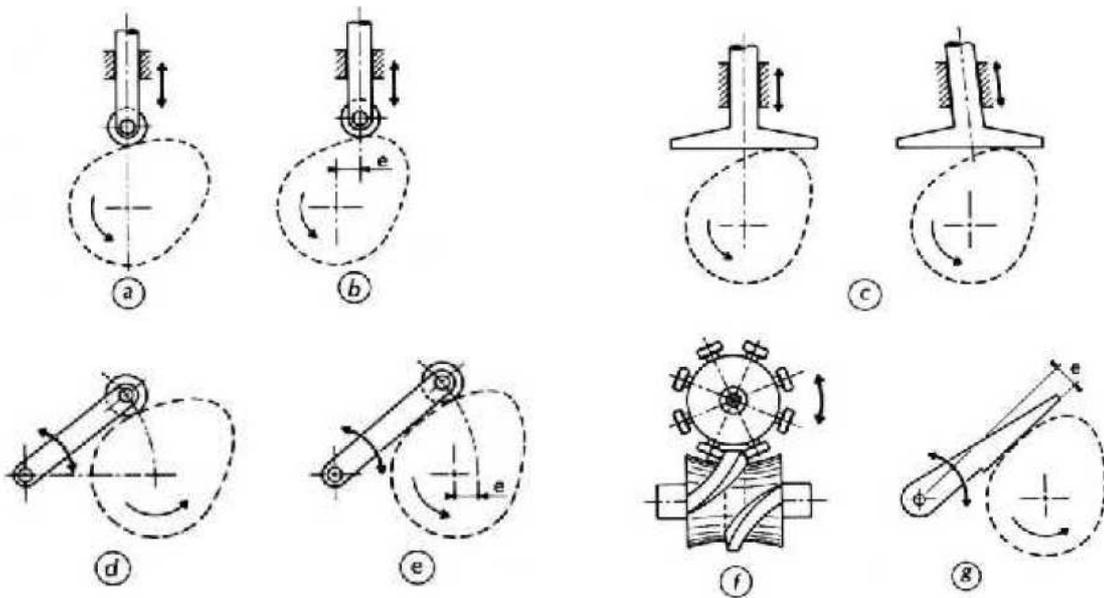


Figure 46: les différents types de cames et de suiveurs

Le mouvement transmis au galet peut généralement être décomposé en 3 cycles élémentaires :

- La montée M (Le rayon grandit)
- La descente D (Le rayon réduit)
- Le repos S pour stationnaire (Le rayon est constant)

La came de la Figure 46.a. est une came MDS, avec les cames SMSDS ce sont les plus courantes.

9.3.1 Conception d'une came

Une came est généralement décrite par deux paramètres, les points de passages (haut et bas dans le cas d'une came MDS) et la loi de levée. La loi de levée permet de relier les points de passage en assurant la continuité autour de ces points. Les lois de levée peuvent être des polynômes, des courbes de Bézier, des lois uniformes (garantissant des vitesses constantes et des accélérations nulles)...

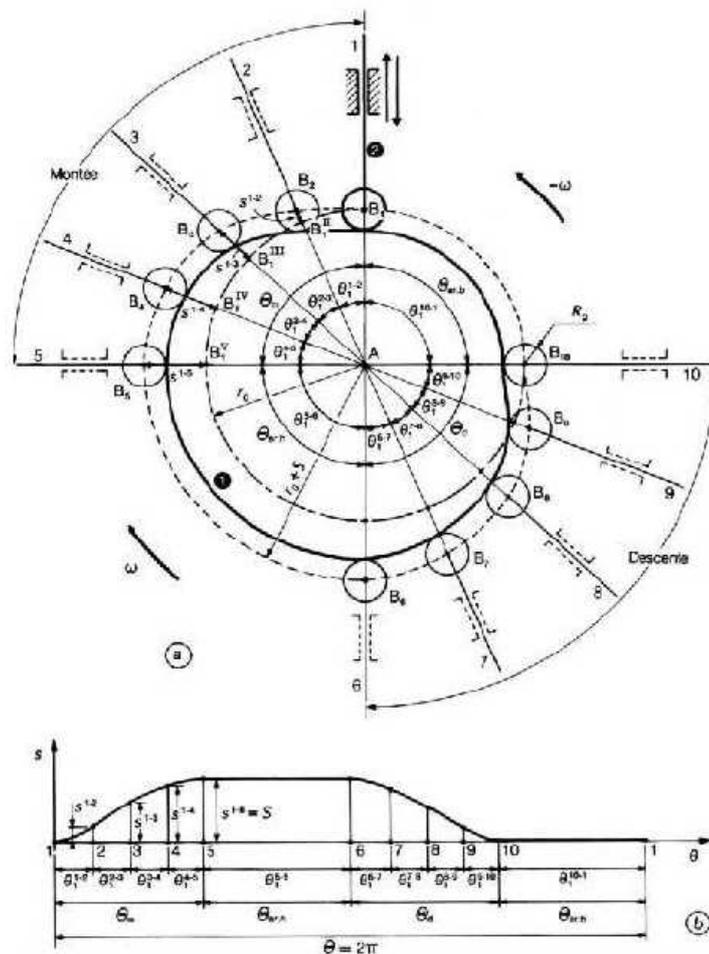


Figure 47: exemple de diagramme permettant la conception d'une came.

Interférence : si, sur une portion de la came, son rayon de courbure est négatif et inférieur au rayon du galet, alors il y a deux points de contact entre la came et le galet. Le déplacement du suiveur est perturbé, il convient d'être vigilant lors de l'établissement du profil de la came.

Réversibilité : sauf cas très exceptionnel, ce système n'est pas réversible.

9.4 Bielle manivelle

Le système bielle-manivelle est un modèle de mécanisme qui doit son nom aux 2 pièces qui le caractérisent. La manivelle est une pièce entraînée en rotation sur laquelle est lié la bielle par une liaison pivot. L'autre extrémité de la bielle est généralement reliée à une pièce guidée linéairement appelée l'oscillateur (par exemple un piston).

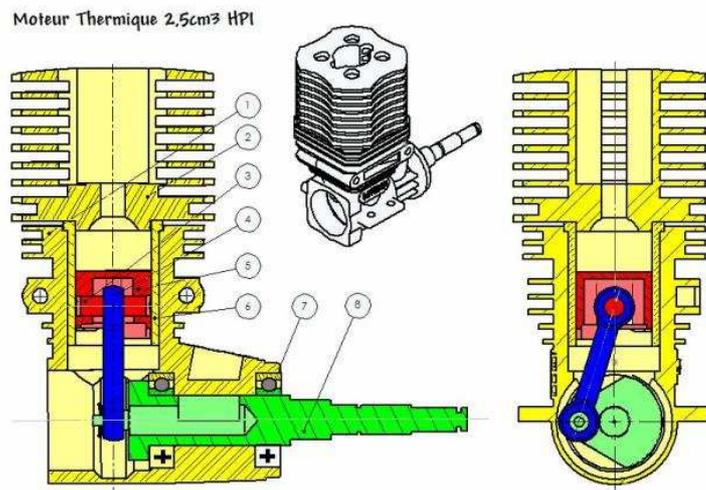
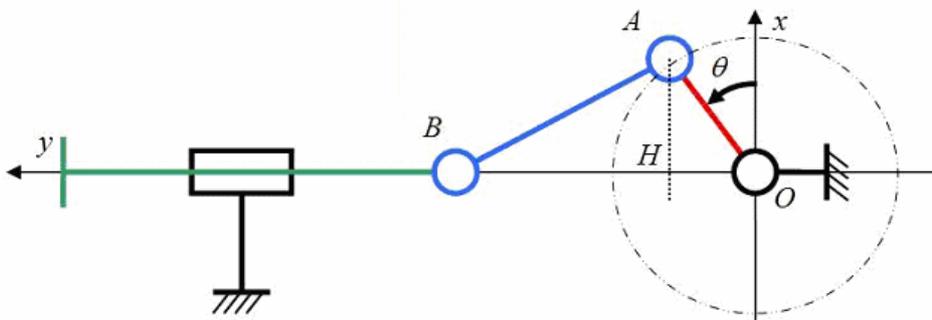


Figure 48: vue en coupe d'un moteur thermique

Ce système est utilisé dans les moteurs à explosions, à vapeur, les pompes/compresseurs ...

9.4.1 Mise en équations

La position de l'oscillateur $y=OB=f(\theta)$



La longueur de la bielle est donnée par $L=AB$

La rayon de la manivelle est donnée par $R=OA$

L'orientation de la manivelle est donnée par l'angle θ

Dans le triangle OAH, on écrit le théorème d'Al-Kashi :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos(90 - \theta)$$

$$L^2 = R^2 + y^2 - 2.R.y.\sin(\theta)$$

$$y^2 - 2.R.y.\sin(\theta) + R^2 - L^2 = 0$$

C'est une équation du second degré :

$$\Delta = 4.R^2.\sin^2\theta - 4R^2 + 4L^2 = -4R^2.\cos^2\theta + 4L^2$$

On obtient le couple de solutions :

$$y = R \sin \theta \pm \sqrt{L^2 - R^2.\cos^2\theta}$$

En dérivant cette équation, on obtient le système différentiel suivant :

$$y' = R\theta' \cos \theta \pm \frac{R^2.\sin \theta.\cos \theta}{\sqrt{L^2 - R^2.\cos^2\theta}} \theta' \Rightarrow Ay' = B\theta'$$

avec $A = \sqrt{L^2 - R^2.\cos^2\theta}$ et $B = R \cos \theta (\sqrt{L^2 - R^2.\cos^2\theta} \pm R \sin \theta)$

9.4.2 Singularités

Une configuration singulière est une position du mécanisme engendrant des phénomènes particuliers, généralement indésirables, comme des vitesses nulles ou des forces infinies.

Une singularité de type 1 apparaît lorsque $B=0$ et $R \cdot \cos \theta = 0$
(si $\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2 \theta} \pm R \sin \theta = 0$ c'est une singularité de type 3)

$R \cdot \cos \theta = 0$ signifie que $\theta = \pi$ ou $\theta = 0$.

Les positions obtenues correspondent à l'alignement de la bielle et de la manivelle sur l'axe.

Dans cette configuration :

- une vitesse sur la manivelle ne produit pas de vitesse sur l'oscillateur,
- on peut appliquer une force infinie sur l'oscillateur sans qu'il n'y ait de moment d'induit sur la manivelle. (en pratique on ne peut pas prédire si la manivelle va partir vers le haut ou vers le bas)

Une singularité de type 2 apparaît lorsque $A=0$

$L^2 - R^2 \cdot \cos^2 \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{L}{R}$, le triangle OAB est rectangle en B (cela n'est possible

que si la bielle est plus courte que la manivelle).

Dans cette configuration :

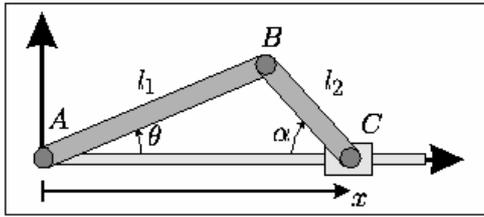
- une vitesse sur l'oscillateur ne produit pas de vitesse sur la manivelle,
- on peut appliquer un moment infini sur la manivelle sans qu'il n'y ait de force induite sur l'oscillateur. (en pratique on ne peut pas prédire sur l'oscillateur va partir vers la gauche ou vers la droite)

Une singularité de type 3 apparaît lorsque $B=0$ et $\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2 \theta} \pm R \sin \theta = 0$

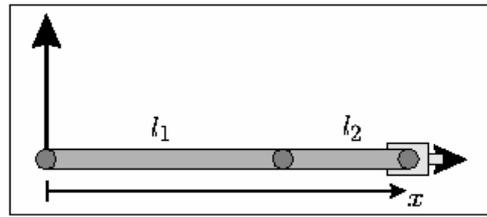
$$\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2 \theta} = \pm R \sin \theta \Rightarrow L^2 - R^2 \cdot \cos^2 \theta = R^2 \sin^2 \theta$$

$$L^2 = R^2 \cdot \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta \Rightarrow L = R$$

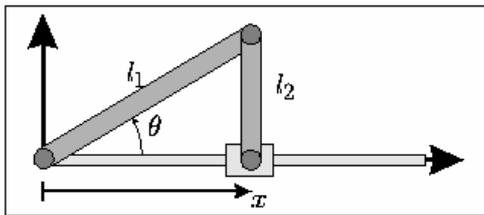
Il s'agit ici d'une singularité architecturale puisqu'elle est liée à la conception du système : bielle de même longueur que la manivelle. A $\theta = \pi/2$ ou $\theta = -\pi/2$, les propriétés sont identiques à une singularité de type 1.



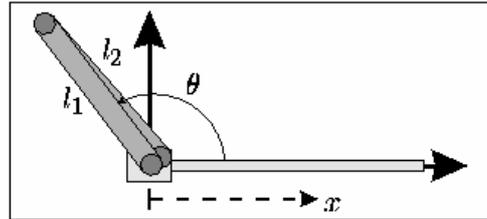
(a) Mécanisme plan de type *RRRP*



(b) Singularité de type *I*



(c) Singularité de type *II*



(d) Singularité de type *III*

Figure 49: les différents types de singularités